SPHERICAL TRIGONOMETRY.

FOR THE USE OF COLLEGES AND SCHOOLS;

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDÚ,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,
HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL DELHI

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

رساله علم مثلث كروي

مدرسوں اور مکتبوں کے لیئے معہ بہت سي مثالوں کے

مولفہ

ٹاڈھنٹر صاحب. ایم. اے. ایف. آر ایس.

جسکو

منشي محمد ذکاءالله صاحب هیڈ ماسٹر نارمل اسکول دهلی

نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسیٹي علیگڈه اور سین ٹیفک سوسیٹي صوبہ بہار

اُردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دهلي مطبع مرتضوي میں باهتمام حاجي محمد عزیزالدین
کے مطبوع هوا
سنہ ۱۸۷۱ع ●

SPHERICAL TRIGONOMETRY.

FOR THE USE OF COLLEGES AND SCHOOLS.

WITH NUMEROUS EXAMPLES.

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDÚ,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKÁ-UL-LÁH,
HEAD MASTER, NORMAL SCHOOL, DELHI

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR.

رساله علم مثلث كروي

مدرسوں اور مكتبوں كے ليئے معه بہت سي مثالوں كے

مولفه

تاڈهنٹر صاحب ايم اے ايف. آر. ايس.

جسكو

منشي محمد ذكاءالله صاحب هيڈ ماسٹر نارمل اسكول دهلي

نے

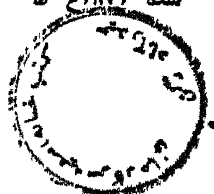
بتائيد مقاصد

سئينٹيفک سوسيٹي عليگڈه اور سئينٹيفک سوسيٹي صوبه بہار

اردو ميں ترجمه كيا

اور

بمقام دهلي مطبع مرتضوي ميں باهتمام حاجي محمد عزيزالدين
كے مطبوع هوا
سنه ١٨٧١ ع



بسم اللہ الرحمن الرحیم

دیباچہ علم مثلث کروی

جو علم مثلث مستوی کی تصنیف کرنی مین مصنف نی باتین ملحوظ خاطر رکہی ہین وہ سب اس کتاب کی تالیف مین بہی پیش نہاد خاطر رکہی ہین اوسمین تمام مسائل موجود ہین جو علم مثلث کروی کی اکثر کتابون مین ہوا کرتی ہین اور بہت سی مثالین مشق کی واسطی لکہی ہین اصل کتاب مین حد سے زیادہ محنت اس بات پر کی گئی ہی کہ وہ تمام جزئیات پر حاوی ہو اور بالکل صحیح ہو غرض یہ کتاب معلمون اور طالب علمون کے لئے فایدہ مند ہے فقط

محمد ذکاء اللہ ہیڈ ماسٹر نورمل سکول دہلی

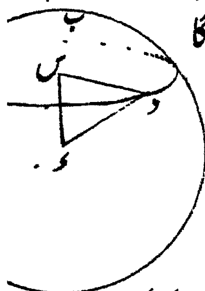
فہرست مضامین

علم مثلث کروی

باب اول دوائر عظیمہ و صغیرہ

(۱) کرہ وہ مجسم ہی جسکو ایک ایسی سطح نی گھیرا ہو کہ جو اوسکا ہر یک نقطہ برابر فاصلہ پر ایک نقطہ معین سے ہو اس نقطہ معین کو مرکز کرہ کہتی ہین اور اس مرکز اور اس سطح کی کسی نقطہ مین جو خط ملے اوسی نصف قطر کرہ جو خط مرکز سی کہنچا جای اور سطح پر دو جانبون مین ختم ہو اوسکو قطر کرہ کہتے ہین

(۲) سطح کرہ کو جو کسی سطح مستوی سی تراشین تو تراش سی دائرہ پیدا ہوگا



فرض کرو کہ کرہ کو جو سطح مستوی تراشتی ہی اوسی تراش ا ب پیدا ہوتی ہی اور ء مرکز کرہ کا ہے سطح مستوے پر مرکز ء سی عمود ء س نکالو اور تراش مین نقطہ د مقرر کرکی ء د اور د س ملاؤ —

چونکہ ء س عمود سطح مستوی پر ہی اسلئی زاویہ ء س د قائمہ ہی اور اسیواسطے س د = √(ء د² − ء س²)

اب ء اور س نقاط معینہ ہین اور ء س کی مقدار مستقل و معین ہی اسلئی کہ وہ نصف قطر کرہ کا ہے اسی ثابت ہوا کہ س د کی مقدار مستقل و معین ہی — علی ہذا القیاس تمام نقطی کہ تراش سطح مستوے مین واقع ہین نقطہ معین س سی برابر فاصلہ پر واقع ہین — اسواسطی تراش دائرہ ہی جسکا مرکز س ہی

(۳) اگر سطح مستوی کرہ کی مرکز پر سی گذر کر سطح کرہ کو تراشی تو نشان تراش کو دائرہ عظیم کہتی ہین اور اگر سطح مستوی کرہ کی مرکز پر سی نہ گذری تو نشان تراش کو دائرہ صغیرہ کہتے ہین

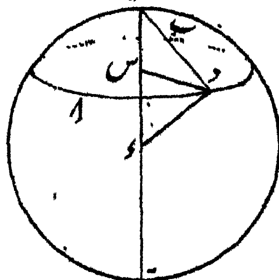
اسی معلوم ہوا کہ قطر دائرہ عظیم اور کرہ کا ایک ہی ہوتا ہے اور تراش کو سطح متفاصل بہی کہتی ہین

(۴) اگر کرہ کی سطح مستدیر پر دو نقطی مقرر کئی جائین تو فقط ایک ہی سطح مستوی سب عرضون مین

مرکز کرہ اور ان دو نقطون پر گذرتی ہوئی کہیچ سکتی ہی مگر اوس صورت مین کہ یہہ دو نقطے قطر کرہ کے اطراف ہون اوسوقت لاانتہا سطحین ان نقطون پر گذرتی ہوئی کہیچ سکتی ہین اسی ثابت ہوا کہ اگر دو نقطے سطح مستدیر کرہ پر اطراف قطر نہ ہون تو صرف ایک دائرہ عظیم اون نقطون اور مرکز مین گذرتا ہوا کہیچ سکتا ہی جب یہہ دائرہ عظیم ایک ہی کہنچا ہی تو وہ غیر مساوی حصون مین دو نقطون پر تقسیم ہوتا ہے اختصاراً قوس خورد کو ہم کہا کرتی ہین کہ وہ دو نقطون کو وصل کرتی ہے

(۵) کرہ کی کسی دائرہ کا محور وہ قطر کرہ کا ہی جو سطح مستوی دائرہ پر عمود ہی اور محور کے اطراف کو قطبین کہتی ہین — دائرہ عظیم کی قطبین برابر فاصلہ پر سطح مستوی دائرہ سی ہوتی ہی — دائرہ صغر کی قطبین سطح مستوی دائرہ سی مساوی فاصلون پر نہین ہوتی اسلئی ایک قطب کو قطب قریب اور دوسرے کو قطب بعید کہتی ہین اور بعض اوقات اختصار کیواسطی قطب قریب ہے کو قطب کہتے ہین

(۶) ہر ایک دائرہ کا قطب برابر فاصلہ پر محیط دائرہ کے ہر نقطہ سے ہوتا ہے

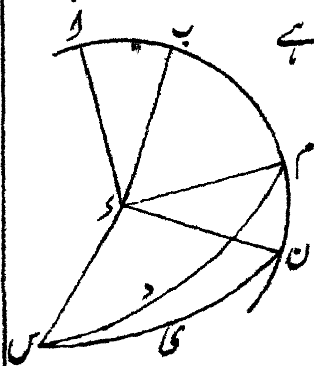


فرض کرو کہ ء مرکز کرہ ہی — اور اب دائرہ کرہ کا ہی — س مرکز دائرہ کا — ق اور ق قطبین دائرہ — محیط دائرہ مین کوئی نقطہ د مقرر کرو — لاؤ س د و ء د و ق د — تو ق د $=\sqrt{(\text{ق س}^2+\text{س د}^2)}$ اور ق س اور س د کی مقداریں مستقل او معین ہین — اسواسطے ق د مقدار مستقل او معین ہی — فرض کرو کہ دائرہ عظیم نقاط ق اور د پر گذرتا ہے — تو تر ق د مقدار مستقل او معین ہی — اسواسطی دائرہ عظیم کی قوس جو ما بین ق اور د کی واقع ہی ایک مقدار معین او مستقل ہی خواہ دائرہ اب مین کوئی مقام د کا ہو

تو دکا مقام خواہ کہین محیط دائرہ پر ہو اوسکی واسطی یہہ بات سب جگہہ موجود ہے

پس کسی دائرہ کی قطب کا فاصلہ محیط دائرہ کی ہر نقطہ سی ایک مقدار معین مستقل رکہا ہی خواہ اس فاصلہ کو خط مستقیم پر جو درمیان دو نقطون کی واقع ہو پیمایش کرین خواہ قوس دائرہ عظیم پر جو اون نقطون کی درمیان ہو

(۷) دو دوائر عظیمہ کی قطبون پر جو قوس دائرہ عظیم کی گذری اوسکی محاذی مرکز کرہ پر جو زاویہ ہوتا ہی وہ سطوح دوائر عظیمہ کی زاویہ میلان کی برابر ہوتا ہے



فرض کرو کہ کرہ کا مرکز ء ہی — س د اور س ی دوائر عظیم ہین جو نقطہ س پر متقاطع ہین اور ا اور ب قطب س د اور س ی کے ہین —

ا اور ب مین گذرتا ہوا ایک دائرہ عظیم کہنچو جو س د اور س ی سی نقاط م اور ن پر ملے —

پس ا ء عمود ء س پر ہی اور ء س ایک خط سطح مستوی ء س د مین ہی — اور ب ء عمود ء س پر ہے اور ء س سطح مستوی ء س ی مین ہی — اسواسطی بحکم (۴ ش ۱۱ م اقلیدس) کے ء س عمود سطح ا ء ب پر ہے — اور اسیواسطے ء س عمود ہی خطوط ء ن اور ء م پر جو اوسی سطح مین ملتے ہین

— اسی ثابت ہوا کہ م ء ن زاویہ میلان سطوح ء س د اور ء س ی کا ہے

اور زاویہ ا ء ب = ا ء م — ب ء م = ب ء ن — ب ء م = م ء ن

(۸) دو دوائر عظیمہ کے مابین جو زاویہ ہوتا ہی اوسی مراد وہ زاویہ ہوتا ہی جسپر میلان اون سطوح کا ہو — جیسا کہ شکل گذشتہ مین زاویہ درمیان دوائر عظیمہ س د اور س ی کے م ء ن ہے

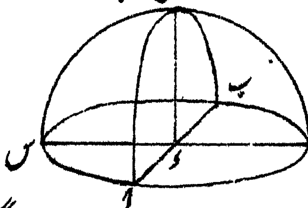
شکل دفعہ ۹ مین چونکہ ق ء عمود سطح ا ء س ب پر ہی اسلئی جو سطح ق ء مین گذریگی سطح ا س ب

پر عمود ہوگی اسسے ثابت ہوا کہ زاویہ درمیان کسی دائرہ اور دائرہ عظیم کی جو اوسکی قطبون پر گذرتا ہی قائمہ ہوتا ہی

(۹) دو دو دوائر عظیمہ آپسمین ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہین

اسواسطی کہ ہر دائرہ عظیم کی سطح مرکز کرہ پر گذرتی ہی اور فصل مشترک ان دائرون کا قطر کرہ ہوتا ہے اور اسیواسطے وہ ہر یک دائرہ کا قطر ہی — اسواسطی دوائر عظیمہ ایک دوسرے کو اون نقاط پر تنصف کرتے ہین جنپر وہ آپسمین ملتی ہین —

(۱۰) دائرہ عظیمہ کے قطب سی جو قوس اوسکی محیط کی کسی نقطہ تک کہنچی جاوے وہ ربعہ دائرہ ہوگی اور محیط پر زاویہ قائمہ بنائیگی



فرض کرو کہ ق قطب دائرہ عظیم ا ب س کا ہی تو قوس ق ا ربعہ دائرہ ہوگی اور ا ب س پر قائمی زاویہی بنائیگی

دلیل فرض کرو د مرکز کرہ کا ہی ملاؤ ق د — تو ق د سطح ا ب س پر زاویئے قائمی بنائیگا چونکہ ق قطب ا ب س کا ہی اسواسطی زاویہ ق د ا زاویہ قائمہ ہی اور قوس ق ا ربعہ دائرہ ہی اور چونکہ ق د عمود سطح ا ب س پر ہی تو زاویہ جو درمیان سطوح ق د ا اور ا ب س کی واقع ہوگا قائمہ ہوگا — اسیواسطی قوس ق ا عمود ا س پر ہے

(۱۱) اگر دوائر عظیمہ کی قوسین سطح مستدیر کرہ کی نقطہ ق کو دو نقاط ا اور س سی جو سطح مستدیر کرہ پر واقع ہین وصل کرین اور یہہ دو نقطی اطراف مقابل قطر کی نہ ہون اور ہر قوس ربعہ دائرہ ہو تو ق قطب اوس دائرہ عظیم کا ہوگا جو نقاط ا اور س پر گذرتا ہی (دفعہ سابق کی شکل دیکھو)

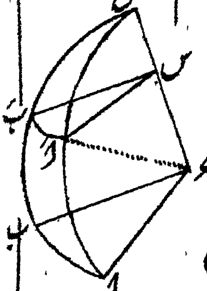
اسواسطے کہ فرض کرو ق ا اور ق س ربعہ دائری ہین اور د مرکز کرہ کا ہی — چونکہ ق ا اور ق س ربعہ دائری ہین — زاویی ق د س اور ق د ا قائمی ہین — اسی ثابت ہوا کہ ق د

قائمی زاوئی سطح اء س پر بناتا ہی اور ق قطب دائرہ عظیمہ اء س کا ہے

(۱۲) دوائر عظیمہ جو اور دوائر عظیمہ کے قطبون پر گذرتی ہین دوائر ثانیہ یا دائرما تحت کہلاتے ہین دفعہ ۷ کی شکل مین دیکہو کہ س قطب اب م ق کا ہی — اور اسیواسطے س م اور س ن دائرہ اب م ن کی دوائر ثانیہ کی حصی ہین م ن مقیاس س م اور س ن کی درمیانی زاویہ کا ہے — یعنی زاویہ درمیانی دو دوائر عظیمہ کا اوس قوس سی نپتا ہی جو اونکی درمیان اوس دائرہ کی واقع ہو جسکی وہ دوائر ثانیہ ہین

(۱۳) اگر سطح مستدیر کرہ پر ایک نقطہ لین اور آسے دو قوسین دوائر عظیمہ کی کہنچی جائین اور وہ ایک دائرہ عظیم کی حصی نہ ہون اور یہ قوسین دائرہ معلوم پر زاوئی قائمی بنائین تو وہ نقطہ قطب دائرہ کا ہوگا اسواسطے کہ دونو قوسین دائرہ معلوم کی سطح پر عمود ہین اسواسطے ان قوسون کا فصل مشترک سطح دائرہ پر عمود ہوگا اور اسیواسطے یہہ فصل مشترک محور دائرہ معلوم کا ہی — اسی ثابت ہوا کہ نقطہ جسی قوسین کہنچی گئی ہین قطب دائرہ کا ہی

(۱۴) ایک دائرہ صغیر کی قوس کی محاذی مرکز پر ایک زاویہ ہی اور دائرہ عظیم کی قوس کی محاذی مرکز پر یہی زاویہ واقع ہی تو ان دونو قوسون کا اپسمین مقابلہ کرو اور نسبت اونکی درمیان بتلاؤ کہ کیا ہی — فرض کرو کہ اَ بَ قوس دائرہ صغیرہ کی ہین — س مرکز دائرہ کا ہے — ق قطب دائرہ کا ہی — ء مرکز کرہ کا ہی — نقطہ ق سی دوائر عظیمہ ق اَ ا اور ق بَ ب کہنچے جو اوس دائرہ سی کہ جسکا قطب ق ہی نقاط ا اور ب پر قطع ہوتی ہین — س اَ و س بَ و ء ا و ء ب ملاؤ — تو س اَ اور س بَ اور ء ا اور ء ب یہہ سب عمود ء ق پر ہونگی — چونکہ سطوح اَ س بَ اور ا ء ب عمود ء ق پر ہین — اسیواسطے س اَ متوازی ء ا کا ہی اور س بَ متوازی ء ب کا ہے — اسیواسطے زاویہ اَ س بَ = زاویہ ا ء ب (بحکم ۱۰ ش ۱۱ م اقلیدس) کے



اسی ثابت ہوا کہ $\frac{\text{قوس اَ بَ}}{\text{نصف قطر س اَ}} = \frac{\text{قوس ا ب}}{\text{نصف قطر ء ا}}$ (بموجب دفعہ ۱۸ علم مثلث مستوی)

اسیواسطی $\frac{\text{قوس ا ب}'}{\text{قوس ا ب}}$ = $\frac{\text{س ا}'}{\text{س ا}}$ = $\frac{\text{س ا}'}{\text{ا}'}$ جب ق ا'

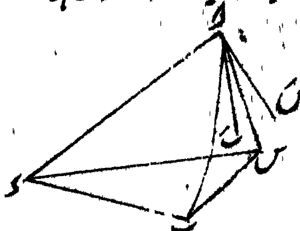
باب دوم مثلث کروی

(۱۵) زاویۂ مجسمہ مین جوزاویئی جہات مستوی سی بنتی ہین اور جہات مستوی جن زاویون پر میلان رکہتی ہین اونکی باہمی ارتباطات اور تعلقات علم مثلث کروی سی دریافت ہوتے ہین

(۱۶) فرض کروکہ ایک زاویۂ مجسمہ کا راس مرکز کرہ کا بنایا جای تووہ سطوح مستوی کہ زاویہ مجسمہ کو بناتی تہین کرہ کو دوائر عظیمہ کی قوسون پر قطع کرینگے پس سطح ایک شکل کرہ کی سطح مستدیر بنجائیگی جسکو مثلث کروی کہتی ہین اوسکو تین قوسین دوائر عظیمہ کی احاطہ کرینگے — یہہ صورت اوسوقت ہوگی زاویۂ مجسمہ مین تین زاویئی مسطحہ ہون — اور اگر زاویئی مجسمہ مین تین سی زیادہ زاویئی سطحہ ہون تو اونکی مطابق سطح مستدیر کرہ پر ایک شکل پیدا ہوگی جسکو دوائر عظیمہ کے تین قوسون سی زاید قوسون نی احاطہ کیا ہوگا اور اوسکو کثیر الاضلاع کروی کہتی ہین

(۱۷) تین قوسین دوائر عظیمہ کی جنسی کہ مثلث کروی بنتا ہی اضلاع مثلث کروی کہلاتی ہین — اور قوسون جہان ملتی ہین اور وہان زاویئی پیدا ہوتی ہین اونکو اون زاویون کو زوایاء مثلث کروی کہتی ہین دفعہ ۸ کو دیکہو

(۱۸) مثلاً فرض کروکہ ء مرکز کرہ کا ہی — اور ایک زاویۂ مجسمہ نقطۂ ء پر ایسا ہی کہ جو تین مسطحہ زاویون سی بنتا ہی — اور فرض کروکہ ا ب اور ب س اور س ا قوسین دوائر عظیمہ کی ہین جنہیر کرہ کو سطوح زاویۂ مجسمہ کی قطع کرتی ہین تو ا ب س ایک مثلث کروی ہی اور قوسین ا ب اور ب س اور س ا اوسکی اضلاع ہین



فرض کروکہ ا ب' مماس نقطۂ ا پر قوس ا ب کا اور ا س' مماس نقطۂ ا پر قوس ا س کا ہے اور مماس ا سی ب اور س کی جانب مین کہنچی گئی ہین تو زاویہ ب' ا س' مثلث کروی کے

زاویون مین سی ایک زاویہ ہوگا اور علی ہذا القیاس زاوئ نقاط ا اور ب پر بنائی گئے
مثلث کروی کے زاوئ ہونگے

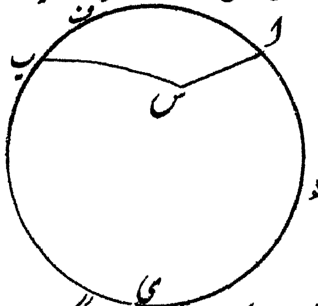
(۱۹) علم مثلث کروی کے مطالب عظیم وہی ہوتی ہین جو مثلثات کروی سی متعلق ہوتی ہین اسیواسطے یہہ امر ضروری ہی کہ مثلث کروی اور اوسکی اجزا کی تصور کو خوب ذہن نشین کرین مثلث کروی کی جو اضلاع ہوتی ہین درحقیقت وہ دوائر عظیم کی قوسین ہوتی ہین اور یہہ قوسین متناسب اون تین مسطح زاویون کی ہوتی ہین جنسی کہ زاویہ مجسمہ بنا ہی اور اس زاویہ مجسمہ کے مطابق مثلث کروی بنتا ہے دفعہ گذشتہ کی شکل مین مثلث کروی ا ب س کا ایک ضلع قوس ا ب ہے اور زاویہ مسطح ا د ب کا مقیاس $\frac{\text{قوس اب}}{\text{نصف قطر ا}}$ ہی یعنی جب تک کہ کرہ نہ بدلی قوس ا ب متناسب زاویہ ا د ب کا ہے زاوئ مثلث کروی کی زاوئ میلان اون سطوح کی ہوتی ہین جنسی کہ زاویہ مجسمہ بنتا ہی وجہ اسکی یہہ ہی کہ ا ب اور ا س دو تو عمود د ا پر ہین اسلئی زاویہ ب ا س زاویہ میلان سطوح د ا ب اور د ا س کا ہے

(۲۰) حروف ا د ب اور س سی اکثر زاوئ مثلث کروی کی تعبیر ہوتی ہین اور طا و طب و طس سی اضلاع مثلث کروی کی — علم مثلث مستوی مین ا اور ب اور س کا استعمال اس معنی مین ہوتا تہا کہ پیمانہ واحد کی معنی بخوبی سمجہہ کر اون زاویون کی قیمت کسی پیمانہ واحد کے مطابق اعداد مین بیان کیا کرتی تہی — مثلاً اگر س زاویہ قائمہ ہو تو س = ۹۰ اگر پیمانہ واحد زاویون کی ناپنی کی لئی درجہ مقرر کیا جای اور س = $\frac{\pi}{2}$ جب پیمانہ واحد وہ زاویہ ہو جسکی سامنے کی قوس برابر نصف قطر کے ہو — پس اسیطرح اضلاع مثلث کروی کی متناسب اون زاویون کے ہوتی ہین جو مرکز پر کرہ کی واقع ہون اوسکی عددی قیمتون کو طا و طب و طس سے تعبیر کرتی ہین خواہ پیمانہ واحد اوسکا کچہہ ہی ہو دفعہ ۲۰ علم مثلث مستوی کی موافق ہم اکثر زاویون اور اضلاع مثلث کروی کو مقیاس قوسی سی بیان کیا کرتے ہین

(۲۱) سطح مستدیر کرہ پر جو قوس کہنچی جای وہ دائرہ عظیم کی قوس خیال کیجائیگی بشرطیکہ اوسکا

خلاف بالتصریح بیان نکیا جاے

(۲۲) آسانی کی واسطی جمہور نی اتفاق کر کی مثلث کروی کی ہر یک ضلع کو نصف دائرہ سی کم مانا ہے



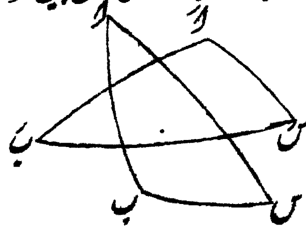
مثلاً شکل مین قوس ا د ی ب نصف دائرہ سی بڑی ہی اور اگر ہم چاہین تو یون خیال کرین کہ مثلث کروی قوسون ا د ی ب اور ا س اور س ب سی بنتا ہی اور اوسکی زاوی نقاط ا د ب اور س پر ہین — لیکن ہم سب اس بات پر متفق ہین کہ ایسی مثلثون کو خارج از بحث سمجھین اور جس مثلث کی زاوئی نقاط ا د س و ب پر ہین اوسکو یون سمجھین کہ وہ اف ب اور ب س اور س ا کے احاطہ کرنے سے پیدا ہوا ہے

(۲۳) دفعہ بالا کی قید سی یہہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہی کہ زاویہ مثلث کروی کا دو قائمون سی کم ہوتا ہی دلیل اسکی یہہ ہی کہ فرض کرو ب س اور س ا اور ب ی د ا سی جو مثلث بنتا ہی وسکا زاویہ ب س ا دو قائمون سی بڑا ہی اور قوس ب س خارج ہو کر ا ی سی د پر ملتی ہے تو بموجب دفعہ ۹ کی ب ی د نصف دائرہ ہی اور اسیواسطی ب ی ا نصف دائرہ سی بڑا ہی اسی معلوم ہوا کہ مثلث مفروض اون مثلثون مین سی نہین ہی کہ جنسی ہم بحث کرتی ہین

باب سوم ہندسہ کروی

(۲۴) نتیجہ مثلث کروی مین جسکی اندر اضلاع اور زوایاء مثلث کروی کے تعلقات اور ارتباطات کی تحقیقات ہوتی ہی اوسمین مثلثی جملہ اضلاع اور زاویون کے اتی ہین یہان ان جملون سی پہلی ہم ہندسہ کروی لکھتی ہین جسمین بعض دعوی اضلاع اور زاویون کی باب مین ثابت کئے جائینگے مگر علم مثلثی نسبتون کا بیان کچھہ نہین کرینگے

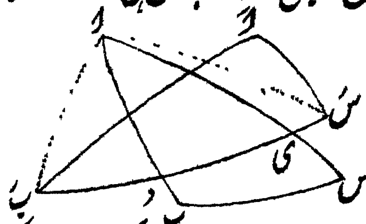
(۲۵) قطبی مثلث - فرض کرو کہ ا ب س مثلث کروی ہی اور نقاط اَ و بَ و سَ قطب
قوسوں ب س اور س ا اور ا ب کی موافق اپنی اپنی نظیر کے اور اونکی اوسی جانب مین واقع
ہین جس جانب مین زاویئی ا اور ب اور س واقع ہین تو مثلث اَ بَ سَ کو قطبی مثلث ا ب س کا
کہینگے



چونکہ مثلث کروی کے ہر ضلع کی دو قطب ہو سکتی ہین اسلئی آٹھہ مثلث قطبی ایسی ایک مثلث
کی بن سکتی ہین کہ جنکی راس زاویون کی قطب مثلث معلوم کی ہون لیکن صرف اوسے مثلث کو
جسمین قطب اَ اور بَ اور سَ اوسی جانب مین واقع ہین جس جانب مین کہ ا اور ب اور س واقع
ہوئی ہین قطبی مثلث کہتے ہین

مثلث ا ب س کو مثلث اولی یا اصلی بہ لحاظ مثلث اَ بَ سَ کے کہتے ہین

(۲۶) اگر ایک مثلث قطبی مثلث دوسرے مثلث کا ہو تو دوسرا مثلث قطبی مثلث پہلی مثلث کا ہوگا
فرض کرو کہ مثلث ا ب س کا قطبی مثلث اَ بَ سَ ہی تو مثلث ا ب س قطبی مثلث مثلث اَ بَ سَ کا ہوگا



دلیل چونکہ بَ قطب ا س کا ہی اسلئی بحکم (۱۰ دفعہ) کی قوس ا بَ ربعہ دائرہ ہے
اور چونکہ سَ قطب ب ا کا ہی اسلئی قوس ا سَ ربعہ دائرہ ہی — اسیواسطی بحکم (۱۱ دفعہ کے)
ا قطب بَ سَ کا ہی — اور نیز ا اور اَ ایک ہی جانب مین ضلع بَ سَ کی واقع ہین کیونکہ
بموجب فرض کی اَ اور ا ایک ہی جانب مین ب س کی واقع ہین — اسلئی ا اَ کم بہ نسبت
ربعہ دائرہ کی ہی اور چونکہ اَ قطب ب س کا ہی اور ا اَ ربعہ دائرہ سی کم ہی تو ا اور اَ ایک سے

جانب مین ضلع ب س کے واقع ہین

علی ہذا القیاس اسیطرح ثابت ہوسکتا ہی کہ ب قطب س ا کا ہی اور ب اور ب ایک ہی جانب مین ضلع س ا کے واقع ہین اور نیز س قطب ا ب کا ہی اور س اور س ایک ہی جانب مین ا ب کے واقع ہین پس ا ب س قطبی مثلث ا ب س کا ہوا

(۲۷) مثلث قطبی کے ضلعی اور زاویئے اصلی مثلث کی ضلعی اور زاویون کی موافق اپنی اپنی نظیر کے تکملے ہوتے ہین

اسواسطی کہ فرض کرو کہ قوس ب س قوسون ا ب اور ا س سی نقاط د اور ی پر ملتی ہی اگر انقطاع کی لیئ ضرورت پڑی تو ان قوسون کو خارج ہی کرو — چونکہ ا قطب ب س کا ہی تو کروی زاویہ ا کا مقیاس بحکم (۱۲ دفعہ) کے قوس د ی کا ہی — لیکن ب ی اور س د مین سی ہر یک ربعہ دائرہ ہے — اسواسطی د ی اور ب س ملکر برابر نصف دائرہ کی ہین یعنی زاویہ جو محاذی ب س کے مرکز کرہ پر واقع ہی تکملہ زاویہ ا کا ہی — اس مطلب کو مختصر طور پر اسطرح بیان کیا کرتے ہین کہ ب س تکملہ ا کا ہی — علی ہذا القیاس ثابت ہوسکتا ہی کہ س ا تکملہ ب کا اور ا ب تکملہ س کا ہے

اور چونکہ مثلث ا ب س قطبی مثلث ا ب س کا ہی اسواسطی اوسی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ ب س اور س ا اور ا ب تکملی موافق اپنی اپنی نظیر کی ا اور ب اور س کی یعنی ا د ب اور س ہین موافق اپنی اپنی نظیر کے ب س اور س ا اور ا ب کے ہین

انہیں خاصیتون کی سبب سے اصلی مثلث اور قطبی مثلث کو بلحاظ ایک دوسرے کی مثلث تکملی کہتے ہین

پس اگر مثلث کروی کی زاویون کو ا و ب و س اور اضلاع کو طا و طب و طس تعبیر کرین اور کو بمقیاس قوسی کی موافق بیان کرین اور مثلث قطبی کی زاویون اور اضلاع کو ا و ب و س اور طا و طب و طس سی تعبیر کرین تو یہہ نتایج ہم کو حاصل ہونگے

ا = ک − طا و ب = ک − طب و س = ک − طس

طا = کہ - ا و طب = کہ - ب و طس = کہ - س

(۲۸) نتایج مذکورہ بالا نہایت کام کی ہین اسلیے کہ اگر کوئی دعوی بالعموم مثلث کروی کے باب مین ثابت کیا جاے تو وہ مثلث قطبی پر جاوی ہوگا فقط اوس دعوی عامہ مین اونکی ضلعون کی جگہ اونکی تکملی اضلاع کی اور اضلاع کی جگہ اونکی تکملی زاویون کے موافق اپنی اپنی نظیر کے تبدیل کردینگی اس اصول کی باب اینده مین مثالین لکھینگے

(۲۹) ہر مثلث کروی کی کوئی سی دو ضلع ملکر تیسری ضلع سی بڑی ہوئی ہین شکل دفعہ ۱۸ کو دیکھو اسواسطے کہ بحکم (۲۰ ش ۱۱ م اقلیدس) کی زاویہ مجسمہ کی کوئی سی دو مسطحہ زاویئے ملکر بڑے تیسرے زاویہ سی ہوتی ہین — اسواسطی کوئی سی دو قوسین اب و بس و س ا مین سے ملکر بڑے تیسرے قوس سے ہوئی

اسی سے یہہ بھی مستنبط ہوتا ہی کہ مثلث کروی کا کوئی سا ضلع دو ضلعون کی تفاوت سے بڑا ہوتا ہے

(۳۰) مثلث کروی کی تینون ضلعون کا مجموعہ بہ نسبت محیط دائرہ عظیم کے چھوٹا ہوتا ہے دیکھو (شکل دفعہ ۱۸)

اسواسطی کہ بحکم (۲۱ ش ۱۱ م اقلیدس) کی زاویہ مجسمہ کے تینون مسطحہ زاویون کا مجموعہ چار قائمون سے چھوٹا ہوتا ہے اسواسطے

اب/دا + بس/دا + سا/دا چھوٹا بہ نسبت ۲ کہ کے ہے

اسواسطے اب + بس + س ا کم بہ نسبت ۲ کہ × دا کی ہے

یعنی مجموعہ قوسون کا محیط دائرہ عظیم سے کم ہے

(۳۱) دعوی جو آخر دو دفعون مین ثابت ہوئی ہین اونکی توسیع ہوسکتی ہے اسطرح سے کہ اگر کوئی کثیر الاضلاع ہو جسکا ہر یک زاویہ دو قائمون سی کم ہو تو ہر یک ضلع باقی اضلاع کے مجموعہ سی کم ہوگا — یہہ امر دفعہ ۲۹ کے مکرر حکم لگانی سے ثابت ہو جایگا

مثلاً فرض کرو کہ شکل چار ضلعی کی ہی اور اونکی زاویون کی نقاط ا و ب و س و د ہین تو

اب + ب س بڑی اس سے ہین

اسیواسطے اب + ب س + س د بڑی اس + س د سے ہین اسلئے

بدرجہ اولے بڑے اد سے ہونگے

پہر اگر کثیر الاضلاع ایسی ہو کہ ہر ایک زاویہ اوسکا دو قائموں سی کم ہو تو تمام ضلعی اوسکی ملکر دائرہ عظیم کے محیط سی کم ہونگی — یہہ بات اوسیطرح جسطرح دفعہ ۳۰ مین ثابت ہوئی (۲۱ ش ۱۱ ام قلیدس) سے ثابت ہے

(۳۲) مثلث کروی کی تینون زاوئی ملکر دو قائموں سی بڑی اور چہہ قائموں سے چہوٹی ہوتی ہین

فرض کرو کہ ا و ب و س مثلث کروی کی زاوئی ہین اور ط ا و ط ب و ط س اضلاع قطبی کے

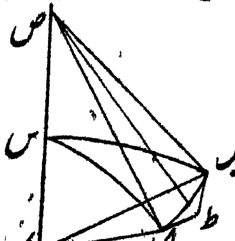
تو بموجب دفعہ ۳۰ کے ط ا + ط ب + ط س چہوٹے بہ نسبت ۲ ک کے ہین

یعنی ک - ا + ک - ب + ک - س کم بہ نسبت ۲ ک کے ہین

اسیواسطے ا + ب + س بڑی بہ نسبت ک کے ہین

چونکہ زوایاء ا و ب و س ہین ہر یک کم بہ نسبت ک کی ہے تو مجموعہ ا + ب + س کم بہ نسبت ۳ ک کے ہے

(۳۳) مثلث کروی متساوی الساقین کے زاوئی فوق القاعدہ کی آپسمین برابر ہین



فرض کرو کہ اب س مثلث کروی ہی جسمین اس = ب س اور د مرکز کرہ کا ہے

تو سون اس اور ب س کے مماس نقاط ا اور ب پر کہنچو تو د س ممدودہ سی ایک ہی نقطہ ص پر ملینگے اور اص برابر ب ص کے ہوگا

مماس اط اور ب ط نقاط ا اور ب پر قوس اب کے کہنچو تو اط = ب ط ہوا و ط ص تو دو مثلثوں ص اط اور ص ب ط مین اضلاع ص ا اور اط اور ط ص برابر ہین ص ب

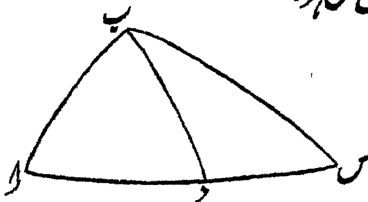
و ب ط و ط ص کے موافق اپنی اپنی نظیر کے ــــ اسیواسطے زاویہ ص ا ط برابر ہی زاویہ ص ب ط کے اور یہی زاوئی فوق القاعدہ کے مثلث کروی کے ہین

شکل مین یہہ خیال کرلیاہی کہ ا س اور ب س ربعہ دائرہ سی کم ہین اگر وہ ربعہ دائرہ سے بڑی ہون تو مماس ا س اور ب س کی س ء خارج شدہ سی بجای س کی طرف خارج ہونی کی ء کی طرف خارج ہونی سی ملینگے اور اثبات وہی رہیگا جواوپر بیان ہوا ــ اگر ا س اور ب س ربعہ دائرہ ہین تو بموجب دفعات ۱۱ اور ۲۰ کی فوق القاعدہ کے زاوئی قائمی ہونگے

(۳۴) اگر مثلث کروی کی دو زاوئی آپسمین برابر ہون تو اونکی مقابل کی ضلعی بہی آپسمین برابر ہونگے

چونکہ مثلث اولی کی دو زاوہی برابر ہین تو مثلث قطبی کی دو ضلعی آپسمین برابر ہونگی اسیواسطے قطبی مثلث مین بموجب دفعہ ۳۳ کے برابر ضلعون کے مقابل کی زاوئی آپسمین برابر ہونگی اسی ثابت ہوا کہ مثلث اولی مین اضلاع برابر زاویون کے مقابل کی آپسمین برابر ہونگے

(۳۵) اگر مثلث کروی مین ایک ضلع بڑا بہ نسبت دوسرے ضلع کی ہو تو بڑی زاویہ کی سامنی کا ضلع بڑا چھوٹے زاویہ کے سامنی کی ضلع سی ہوگا



فرض کروکہ ا ب س مثلث کروی اور زاویہ ا ب س بڑا بہ نسبت زاویہ ب ا س کی ہی تو ضلع ا س بڑا بہ نسبت ضلع ب س کی ہوگا ب پر زاویہ ا ب د برابر زاویہ ب ا د کے بناؤ تو بموجب دفعہ ۳۴ کے ب د برابر ہی ا د کے اور بموجب دفعہ ۲۹ کی ب د + د س بڑی ہین بہ نسبت ب س کے اسیواسطے ا د + د س بڑی بہ نسبت ب س کی ہین یعنی ا س بڑا ب س سے ہی

(۳۶) اگر مثلث کروی کا ایک ضلع بڑا بہ نسبت دوسرے ضلع کی ہو تو زاویہ بڑی ضلع کے سامنی کا بڑا چھوٹے ضلع کے سامنی کی زاویہ سے ہوگا

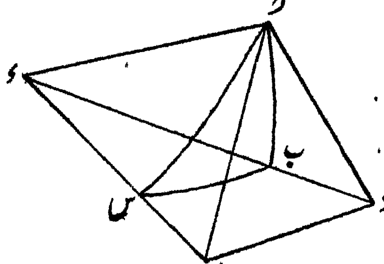
بوساطت قطبی مثلث کے دعوی ثابت کرو

یا اسطرح سی ثابت کرو کہ اس بہ نسبت ب س کی بڑا فرض کرو تو زاویہ ا ب س بڑا بہ نسبت ب ا س کے ہو گا اسواسطی کہ زاویہ ا ب س چھوٹا بہ نسبت زاویہ ب ا س کے بموجب دفعہ ۲۵ کے نہیں ہو سکتا اور زاویہ ا ب س برابر زاویہ ب ا س کے بموجب دفعہ ۲۴ کی نہین ہو سکتا اسواسطی زاویہ ا ب س بڑا بہ نسبت زاویہ ب ا س کے ہے

باب چہارم

مثلث کروی کے اضلاع اور زاویوں کے علم مثلثی جملی

(۲۷) مثلث کی ایک زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کی جیب اور جیب التمام کی قیمتوں مین بیان کرو



فرض کرو کہ ا ب س مثلث کروی ہی اور ء مرکز کرہ کا ہی قوس ا س کا مماس نقطہ ا سے نکالا گیا فرض کرو ء س ممدودہ سی نقطہ ی پر ملتا ہی اور قوس ا ب کا مماس نقطہ ا سی نکالا گیا ء ب ممدودہ سی نقطہ د پر ملتا ہی ملاؤ ہی د ی پس زاویہ ی ا د ایک زاویہ مثلث کروی کا ہی اور زاویہ ی ء د مقیاس ضلع طا کا ہی مثلثات ا د ی اور ء د ی سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$د ی^۲ = ا د^۲ + ا ی^۲ - ۲ ا د . ا ی جم ا$$

$$د ی^۲ = ء د^۲ + ء ی^۲ - ۲ ء د . ء ی جم طا$$

اور زاویہ ی ء ا د اور ء ا ی قائمی ہین تو

$$ء د^۲ = ء ا^۲ + ا د^۲ \text{ اور } ء ی^۲ = ء ا^۲ + ا ی^۲$$

پس تفریق کرنے سے یہہ حاصل ہو گا کہ

۰ = ۲ ء ا ۲ + ۲ ا د ۰ ا ی حم ا − ۲ ء د ۰ ء ی حم طا

اسیواسطے حم طا = ءا/ءی ۰ ءا/ءد + ای/ءی ۰ اد/ءد حم ا

یعنی طا = حم طب جم طس + جب طب جب طس حم ا

اسیواسطے حم ا = (حم طا − حم طب حم طس) / (جب طب جب طس)

(۳۸) ہم نی دفعہ گذشتہ مین جو شکل بنائی ہی اوسمین یہہ فرض کرلیا ہی کہ زاویہ ا کے اضلاع مین سی ہر یک ربعہ دائرہ سی کم ہی اسواسطی کہ ہم نی یہہ فرض کیا ہی کہ نقطہ ا سی مماس نکالی گی ءب اور ءس خارج شدہ سی ملتی ہین — اب ہم ثابت کرینگے کہ جو صورت قانونی کہ اوپر ثابت کی ہی وہی سب صورتون پر حاوی ہی خواہ اضلاع ربعات دائرہ سی کم نہ ہون اب ہم اون سب صورتون کا امتحان کرتی ہین جنمین ایک ضلع یا ہر یک ضلع مثلث کا بڑا ربعہ دائرہ سی یا برابر ربعہ دائرہ کے ہے

(۱) فرض کرو کہ اضلاع مین سی ایک ضلع مثلاً اب بہ نسبت ربعہ دائرہ کے بڑا ہو — با اور بس کو بڑھاکر نقطہ بَ پر ملاؤ اور ابَ = طسَ اور سبَ = طاَ کے مقرر کرو

تو جو کچھہ اوپر ثابت ہوا اوسکے موافق مثلث ابَس مین

حم طاَ = حم طب حم طسَ + جب طب جب طسَ حم بَاس

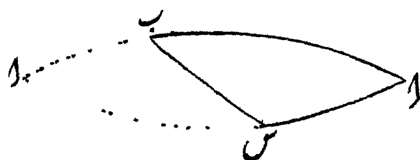
لیکن طاَ = کہ − طا و طسَ = کہ − طس اور بَاس = کہ − ا

پس حم طا = حم طب حم طس + جب طب جب طس حم ا

(۲) اب فرض کرو کہ دو ضلع زاویہ ا کے بڑی بہ نسبت ربعات دائرہ کے ہین

اب اور اس کو خارج کر کے نقطہ ا پر ملاؤ اور اب = طس اور اس = طب

تو موافق سابق کے مثلث اب س مین

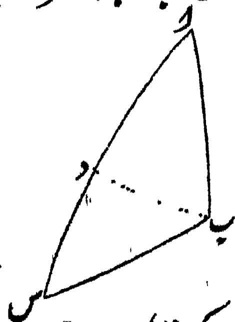


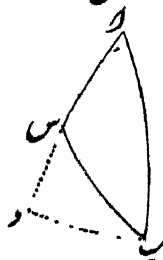
جم طا = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم ا

لیکن طب = کہ ـ طب اور طس = کہ ـ طس اور ا = ا پس

جم طا = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم ا

(۳) فرض کرو کہ زاویہ ا کے اضلاع مین سے ایک ضلع مثلاً اب ربعہ دائرہ ہے





اس پر یا اس ممدودہ پر بشرط ضرورت ا د برابر ربعہ دائرہ کے بناؤ

اور ب د کھینچو ـــ اگر ب د ربعہ دائرہ ہی تو بحکم (۱۱ دفعہ) کے ب قطب ا س کا ہے

اس صورت مین جم طا = $\frac{\pi}{2}$ اور ا = $\frac{\pi}{2}$ اور ایسی ہی طس = $\frac{\pi}{2}$

پس صورت قانونی جو اوپر ثابت ہوئی ہی وہ منطابقہ بن جاتی ہی یعنی ۰ = ۰

اگر ب د ربعہ دائرہ نہ ہو تو مثلث ب د س سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم طا = جم س د جم ب د + جب س د جب ب د جم س ب د

اور جم س ب د = ۰ اور جم س د = جم ($\frac{\pi}{2}$ ـ طب) = جب طب

اور جم ب د = جم ا پس جم طا = جب طب جم ا

اور یہہ وہی صورت قانونی دفعہ ۳۷ کی ہے جبکہ ثت طس = ط/۲

(۴) فرض کرو کہ زاویہ ا کی دونو ضلعون مین سی ہر یک ربعہ دائرہ ہے

تو صورت قانونی یہہ ہو جائیگی جم طا = جم ا اور یہہ امر بدیہی ہی اسواسطی کہ ا قطب ب س کا ہے

اور اسطرح ا = طا

پس ثابت ہوا کہ صورت قانونی دفعہ ۳۷ کے سب حالتون مین ثابت ہے

(۳۹) صورت قانونی دفعہ ۳۷ سی مثلث کی ہر زاویہ کی جیب التمام اضلاع کی جیبون اور جیب التمامون مین بیان ہو سکتی ہی پس یہہ تین صور قانونیہ ہم کو حاصل ہوئین

جم طا = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم ا

جم طب = جم طس جم طا + جب طس جب طا جم ب

جم طس = جم طا جم طب + جب طا جب طب جم س

یہہ مساوات تین علم مثلث کروی مین اصل اصول ہین اونسی بہت سی صور قانونیہ مستنبط ہو سکتی ہین

(۴۰) مثلث کروی کی ایک زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقمون مین بیان کرو

ہم کو معلوم ہی کہ جم ا = (جم طا − جم طب جم طس) / (جب طب جب طس)

اسواسطے جب^{2} ا = ۱ − ((جم طا − جم طب جم طس) / (جب طب جب طس))^{2}

= [(۱ − جم^{2} طب) (۱ − جم^{2} طس) − (جم طا − جم طب جم طس)^{2}] / (جب^{2} طب جب^{2} طس)

= (۱ − جم^{2} طا − جم^{2} طب − جم^{2} طس + ۲ جم طا جم طب جم طس) / (جب^{2} طب جب^{2} طس)

اسواسطے جب ا = √(۱ − جم^{2} طا − جم^{2} طب − جم^{2} طس + ۲ جم طا جم طب جم طس) / (جب طب جب طس)

علامت جذر کی مثبت لینی چاہیے اسلئے کہ جب طب و جب طس و جب ا سب مثبت ہین

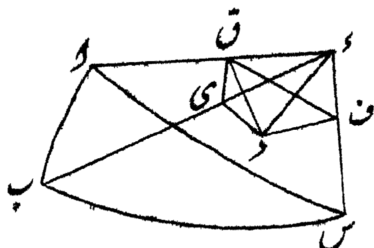
(۴۱) جب ا کی قیمت دریافت ہونی سی دفعہ گذشتہ مین یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\frac{جب\ ا}{جب\ طا} = \frac{جب\ ب}{جب\ طب} = \frac{جب\ س}{جب\ طس}$$

اسواسطے کہ ہر ایک اونمین کا اس جملہ کے برابر ہے

$$\frac{\sqrt{(۱ - جم^۲ طا - جم^۲ طب - جم^۲ طس + ۲ جم طا جم طب جم طس)}}{جب\ طا\ جب\ طب\ جب\ طس}$$

پس اسی ثابت ہوا کہ مثلث کروی کی اضلاع کی جیوب متناسب اونکی مقابل کی زاویون کے جیبوں کے ہوتی ہین — دفعہ ایندہ مین اوسکا ثبوت اور طرح سی لکہتی ہین جسمین کچہہ تعلق اوسکو دفعہ بالاسے نہین رہتا



فرض کروکہ اب س مثلث کروی ہے

ء مرکز کرہ کا ہے — ءا پر نقطہ ق مقرر کرو

اور ق د عمود سطح مستوی ب ء س پر نکالو

اور نقطہ د سی د ی اور د ف عمود ء ب اور ء س پر نکالو

ملاؤ ق ی و ق ف و ء د

چونکہ ق د عمود سطح ب ء س پر ہی تو وہ ہر خط مستقیم پر زاویہ قائمہ بنایگا جو اوسی اوس سطح مین ملین

پس اسی ثابت ہوا کہ ق ی^۲ = ق د^۲ + د ی^۲ = ق ء^۲ - ء د^۲ + د ی^۲ = ق ء^۲ - ء ی^۲

پس ق ی ء قائمہ ہی اسیواسطے ق ی = ء ق جب ق ء ی = ء ق جب طس

اور ق د = ق ی جب ق ی د = ق ی جب ب = ء ق جب طس جب ب

اور علی ہذا القیاس ق د = ء ق جب طب جب س اسیواسطے

ء ق جب طس جب ب = ء ق جب طب جب س

اسیواسطے $\frac{جب\ ب}{جب\ س} = \frac{جب\ طب}{جب\ طس}$

شکل مین یہہ فرض کرلیا ہی کہ طب اور طس اور ب اور س مین سی ہر یک قائمہ سی کم ہی امتحان کرنی سی یہہ بات ثابت ہوگی کہ دعوی سب صورتون مین ثابت ہی فقط شکل کچھہ بدل کرینگے اور ثبوت سب صورتون مین ایک ہی — **دلیل مثلاً** ب فقط ایک قائمہ سے بڑا ہو تو نقطہ د بجای ء ب اور ء س کے درمیان واقع ہونی کی باہر ء ب کی واقع ہوگا تو ق ی د تکملہ ب کا ہی اسلئی جب ق ی د کی برابر جب ب کے ہے

(۴۳) مم طا جب طب = مم ا جب س + جم طب جم س کی ثابت کرنی کی لئی ہم کو معلوم ہی کہ

جم طا = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم ا

جم طس = جم طا جم طب + جب طا جب طب جم س

جب طس = جب طا $\frac{\text{جب س}}{\text{جب ا}}$

جم طس اور جب طس کی قیمتین مساوات اول مین اسطرح سی رکھہ لو کہ

جم طا = (جم طا جم طب + جب طا جب طب جب طس) جم طب + $\frac{\text{جب طا جب طب جم ا جب س}}{\text{جب ا}}$

جبر و مقابلہ سے

جم طا جب^2 طب = جب طا جب طب جم طب جم طس + جب طا جب طب مم ا جب س

جب طا جب طب پر تقسیم کردو تو

مم طا جب طب = جم طب جم س + مم ا جب س

(۴۴) اگر حروف کو بدلین تو اسی طرح کی پانچ اور صورقانونی حاصل ہونگین غرض ایک یہہ اور پانچ اور سب چھہ ملکر یہہ صورقانونی ہونگین

جم طا جب طب = جم ا جب س + جم طب جم س

مم طب جب طا = مم ب جب س + جم طا جم س

مم طب جب طس = مم ب جب ا + جم طس جم ا

مم طس جب طب = مم س جب ا + جم طب جم ا

$$\text{مم طس جب طا} = \text{مم س جب ب} + \text{جم طا جم ب}$$

$$\text{مم طا جب طس} = \text{مم ا جب ب} + \text{جم طس جم ب}$$

(۴۵) مثلث کی نصف زاویہ کی جیب و جیب التمام اور مماس کو اضلاع کی جملوں میں بیان کرو

$$\text{بموجب دفعہ ۲۳ جم ا} = \frac{\text{جم طا} - \text{جم طب جم طس}}{\text{جب طب جب طس}}$$

$$\text{اسیواسطے } ۱ - \text{جم ا} = ۱ - \frac{\text{جم طا} - \text{جم طب جم طس}}{\text{جب طب جب طس}} = \frac{\text{جم}(\text{طب} - \text{طس}) - \text{جم طا}}{\text{جب طب جب طس}}$$

$$\text{اسیواسطے جب}^2 \frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب} \frac{۱}{۲}(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس})\ \text{جب} \frac{۱}{۲}(\text{طا} - \text{طب} + \text{طس})}{\text{جب طب جب طس}}$$

فرض کرو کہ ۲م = طا + طب + طس تو م نصف مجموعہ اضلاع مثلث کا ہوگا پس

$$\text{طا} + \text{طب} - \text{طس} = ۲\text{م} - ۲\text{طس} = ۲(\text{م} - \text{طس})$$

$$\text{طا} - \text{طب} + \text{طس} = ۲\text{م} - ۲\text{طب} = ۲(\text{م} - \text{طب})$$

$$\text{پس جب}^2 \frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب}(\text{م} - \text{طب})\ \text{جب}(\text{م} - \text{طس})}{\text{جب طب جب طس}}$$

$$\text{اور جب} \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{جب}(\text{م} - \text{طب})\ \text{جب}(\text{م} - \text{طس})}{\text{جب طب جب طس}}}$$

$$\text{اور نیز } ۱ + \text{جم ا} = ۱ + \frac{\text{جم طا} - \text{جم طب جم طس}}{\text{جب طب جب طس}} = \frac{\text{جم طا} - \text{جم}(\text{طب} + \text{طس})}{\text{جب طب جب طس}}$$

اسیواسطے

$$\text{جم}^2 \frac{\text{ا}}{۲} = \frac{\text{جب} \frac{۱}{۲}(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس})\ \text{جب} \frac{۱}{۲}(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا})}{\text{جب طب جب طس}} = \frac{\text{جب م جب}(\text{م} - \text{طا})}{\text{جب طب جب طس}}$$

$$\text{اور جم} \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{جب م جب}(\text{م} - \text{طا})}{\text{جب طب جب طس}}}$$

جب $\frac{\text{ا}}{۲}$ اور جم $\frac{\text{ا}}{۲}$ کی صورتوں سے ہم یہ مستنبط کرتے ہیں کہ

$$\text{مس} \frac{\text{ا}}{۲} = \sqrt{\frac{\text{جب}(\text{م} - \text{طب})\ \text{جب}(\text{م} - \text{طس})}{\text{جب م جب}(\text{م} - \text{طا})}}$$

جذر کی علامت مثبت سب جگہہ ہوگی اسلئی کہ $\frac{1}{2}$ م قائمہ سی ہی اسلئی اوسکی جیب و جیب التمام اور مماس سب مثبت ہونگے

(۴۶) چونکہ جیب ا = ۲ جیب $\frac{1}{2}$ جم $\frac{1}{2}$ تو اسی ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

جیب ا = $\frac{۲}{\text{جیب طب جیب طس}}$ $\sqrt{\text{جیب م جیب (م - طا) جیب (م - طب) جیب (م - طس)}}$

یہہ جملہ اور وہ جملہ جو دفعہ ۴۴ مین جیب ا کی بیان کرنے کی لئی دریافت کیا آپسمین مطابق ہین اگر نسب نما کو اجزاء ضربی مین اوسطرح لکہلین جسطرح علم مثلث مستوی کی دفعہ ۱۱۵ مین لکہا ہی آسانی کی لئی ہم جذر کی جگہہ ایک رمز جیب ا کی قیمت مین کام مین لاتے ہین ہم اوسکو ن سے تعبیر کرتے ہین تو

ن^{۲} = جیب م جیب (م - طا) جیب (م - طب) جیب (م - طس)

اور یہان ن^{۲} = ۱ - جم^{۲} طا - جم^{۲} طب - جم^{۲} طس + ۲ جم طا طب جم طس

(۴۷) ایک مثلث کی ایک ضلع کی جیب التمام کو اضلاع اور زاویون کی جیب التماموں مین بیان کرو

دفعہ ۳۷ کی صورت مین بموجب دفعہ ۲۸ کی اضلاع کی جگہہ تکملے اونکی زاویون کی اور زاویہ کے جگہ اوسکا تکملہ ضلع کا اسطرح بدل دین کہ

جم (ک - ا) = جم (ک - ب) جم (ک - س) + جیب (ک - ب) جیب (ک - س) جم (ک - طا)

یعنی جم ا　= - جم ب جم س + جیب ب جیب س جم طا اور علے ہذا القیاس

جم ب　= - جم س جم ا + جیب ا جیب س جم طب

جم س　= - جم ا جم ب + جیب ا جیب ب جم طس

(۴۸) دفعہ ۴۴ کی صورتین اگر زاویون کی جگہہ اونکی تکملی اضلاع کی اور اضلاع کی جگہہ اونکی تکملی زاویون کی بدل دین تو یہہ دریافت ہوگا کہ کچھہ صور اور نہین پیدا ہونگین بلکہ وہی صور دوبارہ حاصل ہونگین اس خیال سی وہ صور قانونی ذہن مین جم سکتی ہین اور بہ آسانی سی یاد رہ سکتی ہین

(۴۹) ایک مثلث کی نصف ضلع کی جیب اور جیب التمام اور مماس کو زاویون کے جملوں مین بیان کرو

بموجب دفعہ ۴۷ جم طا $= \frac{\text{جم ا + جم ب جم س}}{\text{جب ب جب س}}$

اسیواسطے ۱ - جم طا = ۱ - $\frac{\text{جم ا + جم ب جم س}}{\text{جب ب جب س}} = - \frac{\text{جم ا + جم (ب + س)}}{\text{جب ب جب س}}$

اسیواسطے جب^2 $\frac{\text{طا}}{2}$ $= \frac{\text{جم } \frac{1}{2}\text{(ا + ب + س) جم } \frac{1}{2}\text{(ب + س - ا)}}{\text{جب ب جب س}}$

فرض کرو کہ ۲م = ا + ب + س تو ب + س - ا = ۲ (م - ا) اسیواسطے

جب^2 $\frac{\text{طا}}{2} = \frac{\text{جم م جم (م - ا)}}{\text{جب ب جب س}}$

اور جب $\frac{\text{طا}}{2} = \sqrt{\frac{\text{جم م جم (م - ا)}}{\text{جب ب جب س}}}$

اور نیز ۱ + جم طا = ۱ + $\frac{\text{جم ا + جم ب جم س}}{\text{جب ب جب س}} = \frac{\text{جم ا + جم (ب - س)}}{\text{جب ب جب س}}$

اسیواسطے جم^2 $\frac{\text{طا}}{2} = \frac{\text{جم } \frac{1}{2}\text{(ا - ب + س) جم } \frac{1}{2}\text{(ا + ب - س)}}{\text{جب ب جب س}} = \frac{\text{جم (م - ب) جم (م - س)}}{\text{جب ب جب س}}$

اور جم $\frac{\text{طا}}{2} = \sqrt{\frac{\text{جم (م - ب) جم (م - س)}}{\text{جب ب جب س}}}$

اسی ثابت ہوا کہ مس $\frac{\text{طا}}{2} = \sqrt{\left\{ - \frac{\text{جب م جب (م - ا)}}{\text{جم (م - ب) جم (م - س)}} \right\}}$

جذر پر علامت مثبت چاہیے اسلئے کہ $\frac{\text{طا}}{2}$ قائمہ سے چھوٹا ہے

(۵۱) دفعہ بالا میں جو جملے لکھی ہیں وہ دفعہ ۴۵ کی جملوں سی بموجب دفعہ ۲۸ کی مستنبط ہو سکتی تھی قیمتیں جب $\frac{\text{طا}}{2}$ و جم $\frac{\text{طا}}{2}$ و مس $\frac{\text{طا}}{2}$ کی اصلی ہیں — اسواسطے کہ م ایک قائمہ سی بڑا اور س قائموں سی چھوٹا بموجب دفعہ ۲۳ کی ہی اسیواسطے جب م منفی ہی اور مثلث قطبی میں ہر یک ضلع کم بہ نسبت مجموعہ باقی اضلاع کی ہوتا ہی تو ک - ا کم بہ نسبت ک - ب + ک - س ہے اسیواسطے ب + س - ا کم ک سے ہے اسیو اسطے م - ا کم $\frac{\text{ک}}{2}$ سی ہی اور ب + س - ا

جبر مقابلہ مین بڑا - ک سی ہی م - ا جبر مقابلہ مین بڑا - ک/۲ سی ہوا اسیواسطی جم (م - ا)
مثبت ہی اور علی ہذا القیاس جم (م - ب) اور جم (م - س) مثبت ہین - اسی ثابت ہوا کہ

جب ا/۲ و جم ا/۲ و مس ا/۲ کی قیمتین اصلی ہین

(۵۱) چونکہ جب طا = ۲ جب طا/۲ جم طا/۲ تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

جب طا = ۲/(جب ب جب س) [- جم م جم (م - ا) جم (م - ب) جم (م - س)]^(۱/۲)

ہم بجای { - جم م جم (م - ا) جم (م - ب) جم (م - س) }^(۱/۲) کے ن استعمال مین لاتے ہین

(۵۲) متماثلات ذیل ثابت کرو

جب ا / جب طا = جب ب / جب طب = م کے فرض کرو

تو بموجب مسئلہ جبریہ کی م = (جب ا + جب ب) / (جب طا + جب طب) . . . . (۱)

اور نیز م = (جب ا - جب ب) / (جب طا - جب طب) . . . . . . (۲)

اب جم ا + جم ب جم س = جب ب جب س جم طا = م جب س جب طب جم طا

اور جم ب + جم ا جم س = جب ا جب س جم طب = م جب س جب طا جم طب

اسیواسطے جمع کرنی سی (جم ا + جم ب) (۱ + جم س) = م جب س جب (طا + طب) . . . (۳)

اسیواسطے بموجب (۱) کے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

(جب ا + جب ب) / (جم ا + جم ب) = (جب طا + جب طب) / جب (طا + طب) . (۱ + جم س) / جب س

یعنی مس ۱/۲ (ا + ب) = جم ۱/۲ (طا - طب) / جب ۱/۲ (طا + طب) مم س/۲ . . . . (۴)

اور علی ہذا القیاس (۳) اور (۲) سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

(جب ا - جب ب) / (جم ا + جم ب) = (جب طا - جب طب) / جب (طا + طب) = (۱ + جم س) / جب س

یعنی مس ۱/۲ (ا - ب) = جب ۱/۲ (طا - طب) / جب ۱/۲ (طا + طب) مم س/۲ . . . (۵)

(٤) اور (٥) مین ک − ا بجای طا وغیرہ کے لکھو تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}+\text{طب}\right)=\frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}-\text{ب}\right)}{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}+\text{ب}\right)}\ \text{مس}\ \frac{\text{طس}}{2}\qquad(٦)$$

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}-\text{طب}\right)=\frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}-\text{ب}\right)}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}+\text{ب}\right)}\ \text{مس}\ \frac{\text{طس}}{2}\ \ldots\ldots\qquad(٧)$$

صور (٤) (٥) (٦) (٧) متناسب یا متماثل صورت مین لکہی جاسکتی ہین اور اونکو نیپر صاحب نے ایجاد کیا اسلئی اونکا نام متماثلات نیپری ہی — اخر دو صورتین بغیر مثلث قطبی کی استعانت کے ثابت ہوسکتی ہین اگر دفعہ ٣٩ کے صور سی اونکا استنباط کرین

(٥٣) مساوات (٤) مین جم $\tfrac{1}{2}$ (طا − طب) اور جم $\frac{\text{س}}{2}$ ضرور بہشت مقادیر ہین اسے ثابت ہوتا ہے کہ مس $\tfrac{1}{2}$ (ا + ب) اور جم $\tfrac{1}{2}$ (طا + طب) کی ایک ہی علامتین ہین اسطرح سی کہ $\tfrac{1}{2}$ (ا + ب) اور $\tfrac{1}{2}$ (طا + طب) کیا تو دونون مین سی ہریک قائمہ سی کم ہی یا ہریک قائمہ سی بڑا ہے اور اس مطلب کو ہم اسطرح ادا کیا کرتی ہین کہ $\tfrac{1}{2}$ (ا + ب) اور $\tfrac{1}{2}$ (طا + طب) ہم صفت ہین

(٥٤) مسائل گاس صاحب کے ثابت کرو

ہم ثابت کرائی ہین کہ جم طس = جم طا جب طب + جب طا جب طب جم س اسیواسطے

$$\text{١}+\text{جم طس}=\text{١}+\text{جم طا جب طب}+\text{جب طا جب طب}\left(\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}-\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}\right)$$

$$=\text{١}+\text{جم}\left(\text{طا}-\text{طب}\right)\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}+\left[\text{١}+\text{جم}\left(\text{طا}+\text{طب}\right)\right]\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}$$

اسیواسطے

$$\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طس}=\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}-\text{طب}\right)\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}+\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}+\text{طب}\right)\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}$$

علی ہذا القیاس

$$\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طس}=\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}-\text{طب}\right)\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}+\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}+\text{طب}\right)\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}$$

اب نیپر صاحب کی اول دو متماثلات کی ہر رکن کے مجذور پر واحد زیادہ کرو تو اون صور سے جو ابہی ثابت ہوئین ہین یہہ نتیجہ پیدا ہوگا

$$\text{قط}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}+\text{ب}\right)=\frac{\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طس}}{\text{جم}^{2}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}+\text{طب}\right)\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}}\qquad(١)$$

$$\text{قط}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{ا}-\text{ب}\right)=\frac{\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\ \text{طس}}{\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\left(\text{طا}+\text{طب}\right)\text{جب}^{2}\ \tfrac{1}{2}\text{س}}\ \ldots\ldots\qquad(٢)$$

جذرین نکالو تو اس سبب سے کہ ½ (ا + ب) اور ½ (طا + طب) ہم صفت ہین اسلئے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

جم ½ (ا + ب) جم ½ طس = جم ½ (طا + طب) جب ½ س . . . (۱)

جم ½ (ا − ب) جب ½ طس = جب ½ (طا + طب) جب ½ س . . . . (۲)

ان نتایج کو اول دو متماثلات نیپری مین ضرب دو تو یہہ نتایج مستنبط ہونگے

جب ½ (ا + ب) جم ½ طس = جم ½ (طا − طب) جم ½ س . . . (۳)

جب ½ (ا − ب) جب ½ طس = جب ½ (طا − طب) جم ½ س . . . (۴)

ان چار اخر کی صور کو گاس صاحب کی مسائل کہتی ہین اگرچہ حقیقت مین وہ ڈلمبر صاحب نے ایجاد کی ہین اونکو ضوابط ڈلمبر کہنا چاہیے

(۵۵) دفعہ ۲۷ مین مثلثات جو تکملی ایک دوسرے کی ہون اونکی خواص علم ہندسہ سی ثابت کی ہین اور ان خواص سی دفعہ ۴۷ کی صور کو ثابت کیا ہی لیکن یہہ صور دفعہ ۳۹ سی بھی بغیر علم ہندسہ کی مستنبط ہوسکتی ہین اسی معلوم ہوا کہ ساری مضامین کا مدار دفعہ ۳۹ پر ہے

اسواسطی کہ دفعہ ۳۹ سی ہم کو جم ا و جم ب و جم س کی جملی دریافت ہوسکتی ہین اور اونسے ہم کو یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

جم ا + جم ب جم س = ((جم طا − جم طب جم طس) جب² طا + (جم طب − جم طا جم طس) (جم طس − جم طا جم طب)) / (جب² طا جب طب جب طس)

اس کسر کی شمار کنندہ مین ا − جم² طا بجائی جب² طا کی لکہو تو وہ مختصر ہوکر یہہ صورت پیدا کریگی کہ

جم طا (ا − جم² طا − جب² طب − جم² طس + ۲ جم طا جم طب جم طس)

اور یہہ بموجب (۴۱) کے برابر ہی جم طا جب ب جب س جب² طا جب طب جب طس کے

اسواسطے جم ا + جم ب جم س = جم طا جب ب جب س

اسیطرح سے اور باقی دو صور ثابت ہوسکتی ہین

اسطرح دفعہ ۴۷ کی صور ثابت ہوگئین اسواسطی بغیر قطبی مثلثون کے خواص اور وجود ماننی کی ہم یہہ مسئلہ مستنبط کرسکتی ہین کہ اگر ضلعی اور زاویی کسی مثلث کروی کے اونکے

اضلاع اور زاویون کی تکملون سی موافق اپنی اپنی نظیر کی بدل دیئے جائین تو صور صوری دفعہ ۳۹ کی صحیح اور ٹہیک رہینگی ور اسیواسطے اونسی جو اور نتائج مستنبط ہونگے وہ صحیح ہونگے

(۵۶) اس باب کی صور قانوسہ سی بہت سی شکلین بالحر مثلث کروی کی باب مین ایسی ثابت ہو سکتی ہین جو پہلی بالہندسہ ثابت ہو چکی ہین یا ثابت ہو سکتی ہین مثلاً دوسرے تمثیل نمبری سے

$$\text{مس}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} - \text{ب}) = \frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{طا} - \text{طب})}{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\ (\text{طا} + \text{طب})}\ \text{مم}\ \frac{\text{س}}{2}$$

اسی ثابت ہوتا ہی کہ $\tfrac{1}{2}$ (ا - ب) مثبت ہی اگر $\tfrac{1}{2}$ (طا - طب) مثبت ہی اور منفی ہے اگر $\tfrac{1}{2}$ (طا - طب) منفی ہی اور صفر ہی اگر $\tfrac{1}{2}$ (طا - طب) صفر ہی - پس اسطرح سارے نتائج جو دفعہ ۳۳ سی ۳۶ تک ثابت کئی تہی سب ثابت ہو گئی

(۵۷) اگر دو مثلثون مین ایک مثلث کی دو ضلعی برابر ہون دوسرے مثلث کی دو ضلعون کو موافق اپنی اپنی نظیر کے اور زاویہ اونکی درمیانی بہی آپسمین برابر ہون تو اوسکی اور زاوئی بہی موافق اپنی اپنی نظیر کے برابر ہونگے اور قاعدی بہی اونکی برابر ہونگی

دفعہ ۳۹ کے اول صورت مین دونو مثلثون کی اندر طب وطس وا کو ایک ہی مانکر نتیجہ نکالین تو ثابت ہوگا قاعدی آپسمین برابر ہین اور دو صور قانونی دفعہ ۳۹ سی یہہ ثابت ہوگا کہ ب اور س ایک ہی دونو مثلثون مین ہین

اس بات کو بہی خیال کرنا چاہئی کہ یہان مثلثون کی کیفیت ایسی نہین ہی کہ وہ تطبیق سی ایک دوسرے پر منطبق ضرور ہو جائین ضلعے ایک مثلث کی برابر دوسرے مثلث کی ضلعون کے ہو سکتی ہین لیکن موافق اپنی اپنی نظیر کے نہ ہون بلکہ اونمین مساوات بہ ترتیب معکوس ہو جیسے کہ ان شکلون مین کیفیت ہے



جو دو مثلث اسطرح برابر ہوتی ہین اونکی مساوات کو بالقرینہ کہتی ہین اور جب وہ برابر اسطرح ہوتی ہین کہ تطبیق سی منطبق ہوجاتی ہین تو اونکو مساوات کو مساوات مطلق کہتی ہین

(۵۸) اگر دو کروی مثلثون مین ایک مثلث کی دو ضلعی برابر ہون دوسرے مثلث کی دو ضلعون کو موافق اپنی اپنی نظیر کی لیکن زاویہ درمیانی ان ضلعون کا ایک مثلث مین بڑا ہو دوسرے مثلث کی زاویہ درمیانی سی جو مساوی اضلاع کی درمیان واقع ہی تو قاعدہ بڑی زاویہ والی مثلث کا بڑا چھوٹی زاویہ والی مثلث کی قاعدہ سی ہوگا اور بالعکس اسکی فرض کرو کہ طب اور طس اون ضلعون کو تعبیر کرتی ہین جو مساوی ہین اور طا قاعدہ ہی اور اوسکی سامنی زاویہ ا ہی اور دوسرے مثلث کا قاعدہ طاَ ہی اور اوسکی سامنی کا زاویہ اَ ہی

پس جم طا = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم ا

جم طاَ = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم اَ

اسیواسطے جم طا - جم طاَ = جب طب جب طس (جم ا - جم اَ)

یعنی جب $\frac{1}{2}$ (طا + طاَ) جب $\frac{1}{2}$ (طا - طاَ) = جب طب جب طس جب $\frac{1}{2}$ (ا + اَ) جب $\frac{1}{2}$ (ا - اَ)

اسی ثابت ہوتا ہے کہ $\frac{1}{2}$ (طا - طاَ) اور $\frac{1}{2}$ (ا - اَ) کی ایک ہی علامت ہے اسسے دعوی ثابت ہی کیونکہ طا بڑا طاَ سے ہی تو ا بڑا اَ سے ہے

(۵۹) کرہ کی اوپر کسی دائرہ کی اندر کوئی نقطہ سوا قطب کے معین کیا جاوے تو اوس نقطہ سی جتنی قوسین محیط دائرہ تک کہنچ جائینگی اون سب مین وہ بڑی قوس ہوگی جو قطب پر گذریگی اور دوسرا حصہ اوسکا خارج کیا گیا سب سے چھوٹا ہوگا اور اس قوس کی قریب قریب تو بمقابل بعد کے بڑی ہوگی اور اس نقطہ سی صرف دو ہی قوسین ایسی کہنچ سکتی ہین جو اپسمین برابر ہون اور برابر زاویے چھوٹی قوس سی مقابل جانبون مین بنائین

اوپر کی تین دفعات سے دعوی ثابت کرو

(۶۰) دفعہ ۳۹ کی صورت کا ثبوت ایک اور ہم لکھتی ہین اور وہ نہایت آسان اور سہل ہی مگر

ہندسہ یا جبر کا کچھ علم چاہی —

فرض کرو کہ اب س مثلث کروی ہی، م مرکز کرہ کا ہی اور فرض کرو کہ د معین لا ور محدد ط کا اصل ہی اور محور ط کا نقطہ س پر گذرتا ہی اور لا۱ اور د۱ و ط۱ نقطہ ا کی معین ہین اور لا۲ و د۲ و ط۲ نقطہ ب کی اور نق نصف قطر کرہ کا ہی تو مربع خط مستقیم اب کا برابر ہے

(لا۱ − لا۲)۲ + (د۱ − د۲)۲ + (ط۱ − ط۲)۲

اور نیز نق۲ + نق۲ − ۲ نق۲ جم ا د ب کے

اور لا۱۲ + د۱۲ + ط۱۲ = نق۲ اور لا۲۲ + د۲۲ + ط۲۲ = نق۲ پس

لا۱ لا۲ + د۱ د۲ + ط۱ ط۲ = نق۲ جم ا د ب

اب قایم الزاویہ محددین سی قطبی محددین کی طرف رجوع کرین تو

ط۱ = نق جم بر۱ و لا۱ = نق جب بر۱ جم بل۱ اور د۱ = نق جب بر۱ جب بل۱

ط۲ = نق جم بر۲ و لا۲ = نق جب بر۲ جم بل۲ د۲ = نق جب بر۲ جب بل۲

پس ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

جم بر۲ جم بر۱ × جب بر۲ جب بر۱ جم (بل۱ − بل۲) = جم ا د ب

اب بموجب اصطلاحات علم مثلث کروی کے

جم طا جم طب + جب طا جب طب جم س = جم طس

یہہ ترکیب اثبات عامہ کی ہی اوسمین جتنی مساواتین کام مین آئین ہین وہ عموماً صحیح ہین

امثلہ

(۱) اگر ا = طا ثابت کرو کہ ب اور طب آپسمین برابر ہین یا تکملے ایک دوسرے کی ہین اور ایسی ہی کیفیت س اور طس کی ہے

(۲) اگر مثلث کا ایک زاویہ برابر باقی دو زاویون کی مجموعہ کی ہو تو سب سی بڑا ضلع دوچند اوس بعد سے ہی جو اوسکا نقطہ وسط مقابل کی زاویہ سے رکھتا ہے

(۳) مثلث قطبی مثلث اولی پر کب منطبق ہوتا ہے

(۴) اگر د نقطہ وسط اب کا ہو تو ثابت کرو کہ

جم اس + جم ب س = ۲ جم $\frac{1}{2}$ اب جم س د

(۵) اگر ایک مثلث کروی کی دو زاوئی برابر اپنی مقابل کی ضلعوں کی ہوں تو ثابت کرو کہ باقی ضلع تکملہ باقی زاویہ کا ہوگا اگر مثلث میں دو ربعی اور دو قائمی ہیں تو باقی ضلع برابر باقی زاویہ کے ہوگا

(۶) مثلث متساوی الاضلاع میں ثابت کرو کہ ۲ جم $\frac{طا}{۲}$ جب $\frac{ا}{۲}$ = ۱

(۷) مثلث متساوی الاضلاع میں ثابت کرو کہ مس^۲ $\frac{طا}{۲}$ = ۱ - ۲ جم ا اسی مثلث متساوی الاضلاع کی اضلاع اور زاویوں کی وہ حدیں دریافت کرو کہ جنکی درمیان وہ واقع ہوں

(۸) مثلث متساوی الاضلاع میں ثابت کرو کہ قطا = ۱ + قطا طا

(۹) اگر ایک مثلث کروی کی تینوں ضلعیں تنصیف کی جائیں اور نیا مثلث بنی اور زاویہ درمیان اضلاع جدید $\frac{طب}{۲}$ اور $\frac{طس}{۲}$ کی ہو تو جم بر = جم ا + $\frac{1}{2}$ مس $\frac{طب}{۲}$ مس $\frac{طس}{۲}$ جب ا جب بر

(۱۰) کرہ کی سطح مستدیر پر اب اور س د دو ربعی ہیں اور نقطہ ی پر تقاطع کرتی ہیں اور اونکی اطراف میں دوائر عظیمہ ملائی گئی ہیں تو ثابت کرو کہ جم ای س = جم اس جم ب د - جم ب س جم اد

(۱۱) اگر طا + طب = کہ تو ثابت کرو کہ جب ۲ ب + جب ۲ س = ۰

(۱۲) اگر دہی قوس دائرۂ عظیم کی مثلث کروی کی اضلاع اب اور اس کی نقاط د اور ہی پر تنصیف کری اور ق قطب دی کا ہو اور ق ب اور ق د اور ق ی اور ق س دوائر عظیمہ کی قوسوں سے ملائی جائیں تو ثابت کرو کہ زاویہ ب ق س = دو چند زاویہ د ق ی

(۱۳) ثابت کرو کہ

جب طب جب طس + جم طب جم طس جم ا = جب ب جب س - جم ب جم س جم طا

(۱۴) اگر مثلث کی ضلع ب س میں نقطہ د ہو تو ثابت کرو کہ

جم ا د جب ب س = جم ا ب جب د س + جم ا س جب ب د

(۱۵) اگر ب‌ر اور س‌ر اور ص‌ر دوائر عظیمہ کی ان قوسوں کا طول ہوں جو ا د ب ا اور س سے مقابل کی اضلاع پر عمود نکالی جائیں تو ثابت کرو کہ جیب طا جب ب‌ر × = جب طب جب ص‌ر = جب طس جب س‌ر

= √(۱ - جم۲ طا - جم۲ طب - جم۲ طس + ۲ جم طا جب طب جم طس)

(۱۶) مثلث کروی کی زاویوں ا د ب د س کو قوسین ب‌ر اور س‌ر اور ہر تنصیف کریں اور مقابل کے ضلعوں پر منتہی ہوں تو ثابت کرو کہ مم ب‌ر جم ا/۲ + مم س‌ر جم ب/۲ + مم ص‌ر جم س/۲ = مم طا + مم طب + مم طس

(۱۷) دو بندرگاہ ایک ہی مساویۃ العرض پر واقع ہیں اوسکا عرض مشترک ل ہی اور اونکی طولوں کا تفاوت ۲ لر ہی تو ثابت کرو کہ اگر جہاز بجای مشرق یا مغرب کے سمت میں جانی کے ایک بندرگاہ سی دوسرے بندرگاہ کی طرف دائرہ عظیمہ میں چلی تو بقدر

۲ لو { لر جم ل - جیب۱ (جب لر جم ل) } کے فاصلہ کم طی کرنا پڑیگا

لر حقیاس قوسی ہی اور لو نصف قطر زمین کا ہے

(۱۸) اگر ایک جہاز برفتار مساوی دائرہ عظیم پر چلی اور اوسکی عرض ل۱ و ل۲ و ل۳ ایک خاص وقت کی بعد ہوں اور ص فاصلہ وقت میں طی کیا ہو تو ثابت کرو کہ

ص = لو جم۱- (جب ½ (ل۱ + ل۳) جم ½ (ل۱ - ل۳)) / جب ل۲

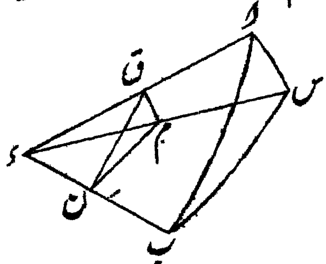
لو نصف قطر زمین کا ہی اور یہہ بھی ثابت کرو کہ طولوں کا تغیر بدل تینوں عرضوں کی رقموں مین دریافت ہو سکتا ہے

باب پنجم مثلث قایم الزاویہ کا حل

(۶۱) ہر مثلث کروی میں چھہ اصلی جزء ہوتی ہیں یعنی تین ضلعی اور تین زاویی سوا نصف قطر کرہ کے جسکی مقدار معین اور مستقل خیال کیجاتی ہی مثلث کروی کی حل کرنی کی یہہ معنی ہیں کہ جب ان چھہ اجزاء ترکیبی میں سے کافی اجزاء معلوم ہوں تو اونسی حساب کرکے باقی اجزاء دریافت کریں

جب ہم آگے لکھینگے تو یہہ بات خود بخود ظاہر ہوجائیگی کہ تین اجزای ترکیبی کی معلوم ہونی سے باقی تین اجزای ترکیبی معلوم ہوسکتی ہین — اول ہم مثلث قایم الزاویہ کا حل لکھتی ہین جسمین دو اجزای سوای زاویہ قائمہ کی معلوم فرض کئی گئی ہین

(۶۲) مثلث قایم الزاویہ کی حل کرنی کی جتنی صور قانونیہ کی ضرورت ہوگی وہ باب گذشتہ سے مثلث کی کسی زاویہ مثلاً س کو قائمہ فرض کرتی حاصل ہوجائینگے لیکن وہ بلاواسطہ بھی نہایت آسانی سی ثابت ہوسکتی ہین اب ہم اونکو جدا گانہ ثابت کرتے ہین



فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث کروی ہی جسکا زاویہ س قائمہ ہی اور ء مرکز کرہ کا ہی کسی نقطہ ق سی ء ا مین ق م عمود ء س پر اور نقطہ م سی م ن عمود ء ب پر لگا لو اور ملاؤ ن ق تو ق م عمود م ن پر اسسبب سی ہوگا کہ سطح مستوی ا ء س عمود سطح مستوی ب ء س پر ہی تو ثابت ہوا کہ

ء ن ۲ = ء م ۲ + م ن ۲ = ء ق ۲ − ء م ۲ + ء م ۲ − ء ن ۲ = ء ق ۲ − ء ن ۲

اسیواسطے ق ن ء ایک مثلث قایم الزاویہ ہے اور

ء ن / ء ق = ء ن / ء م . ء م / ء ق یعنی جم طس = جم طا جم طب . . . (۱)

ق م / ء ق = ق م / ق ن . ق ن / ء ق یعنی جب طب = جب ب جب طس . . . (۲)

علی ہذا القیاس جب طا = جب ا جب طس

م ن / ء ن = م ن / ق ن ، ق ن / ء ن یعنی مس طا = جم ب مس طس . . . (۳)

علی ہذا القیاس مس طب = جم ا مس طس

$\frac{ق م}{ء م} = \frac{ق م}{م ن} \cdot \frac{م ن}{ء م}$ یعنی مس طب = مس ب جم طا
علی ہذا القیاس مس طا = مس ا جم طب ..... (۴)

صور (۴) کو باہم ضرب دو تو

مس ا مس ب = $\frac{\text{مس طا مس طب}}{\text{جب طا جب طب}} = \frac{1}{\text{جم طا جم طب}} = \frac{1}{\text{جم طس}}$ بموجب (۱) کے

اسیواسطی جم طس = مم ا مم ب .... (۵)

(۲) (۳) کے صورتون مین ضرب چلیپایی لگاؤ تو

جب طا جم ب مس طس = مس طا جب ا جب طس

اسیواسطے جم ب = $\frac{\text{جب ا جم طس}}{\text{جم طا}}$ = جب ا جم طب بموجب (۱) کے

پس جم ب = جب ا جم طب
جم ا = جب ب جم طا .... (۶)

ان چھہ صور قانونیہ مین دس مساواتین ہین اور انمین مثلث قایم الزاویہ کی حل کی سب صورتین اگئی ہین اسلئی کہ پانچ مقادیر طا و طب و طس و ا و ب مین تین تین کی ترتیبین لین تو انکا اجتماع دس ہوگا اور دس ہی مساواتین ہین اسلئی ہر مساوات اجتماع تین مقادیر کا پانچ مقادیر مین سی ہی پس جب دو مقدارین ان پانچ مقدارون مین سی معلوم ہون تو تیسرے مقدار مساوات ہای مذکورہ بالا مین سی کسی نہ کسی طرح دریافت ہوجایگی

(۶۳) ہم نی اوپر بیان کیا ہی کہ چھون صور قانونیہ باب گذشتہ کی صور قانونیہ مین س کے قائمہ فرض کرنے سی حاصل ہوسکتی ہین اسطرح کہ (۱) دفعہ ۳۹ سی (۲) دفعہ ۴۱ سی (۳) چوتھی اور پانچوین مساوات دفعہ ۴۴ سی اور (۴) اول اور دوم مساوات دفعہ ۴۴ سی (۵) دفعہ ۴۷ کی تیسری مساوات سی اور (۶) دفعہ ۴۷ کی اول اور دوم مساوات سے چونکہ چھہ صور قانونیہ باب گذشتہ کی ان صور قانونیہ سی جو عموماً صحیح ثابت ہوئین ہین مستنبط ہوسکتی ہین اسلئی دفعہ ۶۲ کی صور قانونیہ کا ثبوت ہر صورت کی لئی صحیح سی طالب علم خود مشق

اس بات کی کرہی کہ جب مقادیر طا و طب و طس و ا و ب مین سی قائمہ یا ربعہ دائرہ ایک ہو یا کئی ہون تو اون صور قانونیہ کی صورت مین کیا کیا تغیر و تبدل ہوگا

(۶۴) دفعہ ۶۲ کی صور قانونیہ سی بعض خواص مثلث قائم الزاویہ کروی کی مستنبط ہو سکتی ہین

(۱) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ جم طس کی وہی علامت ہی جو حاصل ضرب جم طا جم طب کی ہی اسی یہہ استخراج ہوتا ہی کہ کیا تو سب جیب التمام مثبت ہین یا صرف ایک مثبت ہی پس اسواسطے مثلث قایم الزاویہ مین کیا تو تینون ضلعی ربعہ دائرہ سی کم ہین یا ایک ضلع کم از ربعہ اور باقی دو زیادہ از ربعہ ہین

(۴) سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ مس طا کی وہی علامت ہی جو مس ا کی ہی اسیواسطے ا اور طا کیا تو دونو بڑی یا چھوٹی دونو ۹۰ سی ہین اسکو اسطرح بیان کیا کرتی ہین کہ ا اور طا دونو متحد الصفت ہین اور ایسی ہی ب اور طب متحد الصفت ہین

(۶۵) دفعہ ۶۲ کی صور قانونیہ کو اسطرح بھی بیان کرسکتی ہین جسطرح نیچی لکھا ہی وہ یادداشت کی لئے فایدہ مند ہین اور ان نتایج پر وہی نمبر لکھی ہین جو دفعہ ۶۲ مین درج ہین زاویہ قائمہ کی سامنی کی ضلع کو وتر کہتی ہین

جم وتر = حاصل ضرب جیب التمام اضلاع کے … (۱)

جم وتر = حاصل ضرب مماس التماموں زاویوں کے (۵)

جب ضلع = جیب مقابل کے زاویہ کی × جب وتر (۲)

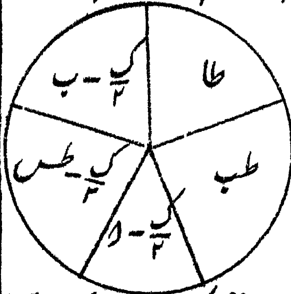
مس ضلع = مس وتر × جیب التمام جم زاویہ درمیانی (۳)

مس ضلع = مس مقابل کی زاویہ × جب دوسری ضلع ہین (۴)

جم زاویہ = جم مقابل کی ضلع × جب دوسری زاویہ کی (۶)

(۶۶) قواعد نیپر صاحب کے — دفعہ ۶۲ کی صور قانونیہ دو قاعدون مین بیان ہو سکتی ہین اور ان قاعدون کی موجد نیپر صاحب ہوئی ہین اسلئی ان قواعد کا نام قواعد نیپری رکھا ہی — اول اول نیپر صاحب ہی نے کتاب چھپوائی تھی جسمین لوگارتم اور قواعد مخصص مذکور کے لکھی تھی صاحب ممدوح ہی انکی موجد تھے اب ان قواعد کے بیان کرنے مین زاویہ قائمہ کا کچھہ خیال نہین کرتی اوسکو چھوڑ دیتی ہین

اور باقی دو ضلعوں کو جو زاویہ قائمہ کے محیط ہین اور باقی دو زاویوں کی تمامی کو تمامی وتر کو مثلث کے اجزای مدور کہتی ہین پس پانچ اجزای مدور ہوئی طا و طب و ک/۲ - ا و ک/۲ - طس و ک/۲ - ب جس ترتیب سے یہہ اجزاء مدور مثلث مین واقع ہوتی ہین



اوسی ترتیب سے ہم نی اونکو دائرہ کی گرداگرد لکہہ دیا ہی ان حصص مدور مین سی کسی ایک کو منتخب کرو اور اوسکا نام جزو متوسط رکہو اور اوسکی ادہر اُدہر جیسی رہت جو اجزاء ہون اونکو اجزاء متصل قرار دو اور باقی دو اجزاء کو اجزاء منفصل — مثلاً اگر ک/۲ - ب کو منتخب کرین اور اوسکو جزو متوسط قرار دین تو اوسکی اجزاء متصلہ طا اور ک/۲ - طس ہونگی اور اجزاء منفصلہ طب اور ک/۲ - ا ہین پس قاعدی نیپر صاحب کے لیے ہین کہ

جب جزو متوسط = اجزاء متصلہ کے مماسون کے حاصل ضرب کے

جب جزو متوسط = اجزاء منفصلہ کے جیب التمامون کی حاصل ضرب کے

(۶۷) نیپر صاحب کی قاعدی اسطرح ثابت ہوتی ہین کہ وہ بالکل مطابق نتایج سابقہ کے ہین اور جدول ذیل سی یہہ تطبیق عیان ہوجائیگی اول ہم نی اس جدول مین جزو متوسط لکہی ہین اور پہر نتایج قواعد نیپر کے اور بعد ازان وہی نتایج دفعہ ۶۲ کی جو ثابت کرائی ہین اور اون پر نمبر حوالہ دینی کے لئی تہی ڈال دئی ہین

ک/۲ - طس جب (ک/۲ - طس) = مس (ک/۲ - ا) مس (ک/۲ - ب)۔ جم طس = مم ا مم ب (۵)

جب (ک/۲ - طس) = جم طا جم طب جم طس = جم طا جم طب (۱)

ک/۲ - ب جب (ک/۲ - ب) = مس طا مس (ک/۲ - طس) جم ب = مس طا مم طس (۳)

جب (ک/۲ - ب) = جم طب جم (ک/۲ - ا) جم ب = جم طب جب ا (۶)

طا جب طا = جب طب مس (ک/۲ - ب) جب طا = مس طب مم ب (۴)

جب طا = جم (ک/۲ - ا) جم (ک/۲ - طس) جب طا = جب ا جب طس (۲)

طب جب طب = مس (ک/۲ - ۱) مس طا جب طب = مم ا مس طا (۱)

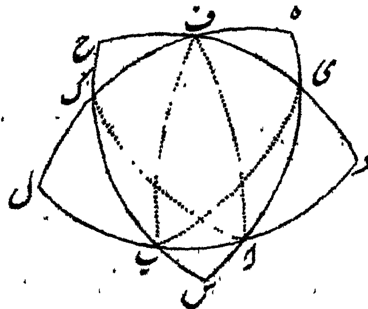
جب طب = جم (ک/۲ - ب) جم (ک/۲ - طس) جب طب = جب ب جب طس (۲)

ک/۲ - ۱ جب (ک/۲ - ۱) = مس طب مس (ک/۲ - طس) جم ا = مس طب مم طس (۳)

جب (ک/۲ - ۱) = جم طا جم (ک/۲ - ب) جم ا = جم طا جب ب (۴)

اخر چار صورتیں نہیں لکھی ہیں اونکا لکھنا گویا دوبارہ اونہیں صور کا لکھنا ہی جو پہلی لکھہ چکی ہیں اور ساتوین اٹھوین صور وہی ہیں جو پانچویں اور چھٹی ہیں اور نوین اور دسوین وہی ہین جو تیسرے اور چوتھی

(۴۸) یہہ جو کہا گیا ہی کہ قواعد نپیر سوا اوس ترکیب کے جو اوپر مذکور ہوئی کسی اور طرح نہیں ثابت ہوتے غلط ہی اسلیے کہ سواے ترکیب مذکورہ بالا کی نپیر صاحب نی تو داپنی ایک کتاب میں ثبوت ان قواعد کا لکھا ہے ہم اوسکا اختصار کرکے بیان کرتے ہین



فرض کرو کہ ا ب س مثلث کروی قایم الزاویہ ہی اور زاویہ س قائمہ ہی ب کو قطب مقرر کرکے دائرۂ عظیم د ی ف ح کھینچو اور ا کو قطب مقرر کرکے دائرۂ عظیم ہ ف ک ل کھینچو اور اصل مثلث ا ب س کے اضلاع کو کھینچو جو ان دائروں سی ملیں پس چونکہ ب قطب د ی ف ح کا ہی تو زاویے د اور ح قائمے ہین اور چونکہ ا قطب ہ ف ک ل کا ہی زاویے ہ اور ل کی قائمے ہین اسی معلوم ہوا پانچ مثلث ب ا س اور ا ی د اور ی ف ہ اور ف ک ح اور ک ب ل قایم الزاویہ ہین اور امتحان سی یہہ امر خوب تحقیق ہو جایگا کہ گو ان پانچ مثلثوں کی اجزا جدا جدا ہین مگر اجزاء مدور دا ونکی ایک ہی ہین مثلاً مثلث ا ی د میں تو زاویہ ی ا د برابری زاویہ ب ا س کی ضلع ا د تمامی ا ب کے ہے

اور چونکہ زاوی س ا د اور ح ب برقائمی ہیں تو بموجب دفعہ ۱۳ کی ی قطب ح س کا ہی اسیواسطی
ی ا تمامی ا س کی ہی اور چونکہ ب قطب د ی کا ہی تو زاویہ ب ی د قائمہ ہی اسیواسطی
زاویہ ب ی س کی ہی یعنی زاویہ ا ی د تمامی ضلع ب س کی بموجب دفعہ ۱۱ کی ہی اور علی ہذا القیاس ضلع د ی برابر کی
زاویہ د ب ی کی اور اسیواسطی تمامی زاویہ ا ب س کی ہی پس اگر معمول کی موافق مثلث
ا ب س کی اجزا کو طا و طب و طس د ا د ب سی تعبیر کریں تو مثلث ا ی د میں وتر برابر $\frac{\pi}{2}$ - طب
کے ہوگا اور زاوی برابر ا ا اور $\frac{\pi}{2}$ - طا کے ہونگی اور انکی مقابل کے ضلعی برابر $\frac{\pi}{2}$ - ب
اور $\frac{\pi}{2}$ - طس کے ہونگی اسیواسطی اجزاء مدورہ وہی د کی وہی ہیں جو اجزاء مدورہ مثلث
ا ب س کی اور اسیطرح ثابت ہو سکتا ہے کہ باقی تین مثلث قائم الزاویوں میں سی ہر یک
کا اجزاء مدورہ وہی ہیں جو مثلث ا ب س کے ہیں

دفعہ ۶۵ کے اشکال نظری میں سی کوئی سی دو مثلاً (۱) اور (۳) لو اور انکو پانچوں مثلثوں میں
جو شکل گذشتہ میں بنی ہوئی ہیں استعمال کرو تو اونسی ثابت کے سب قواعد نیپری صحیح ثابت ہو جاینگے
پس اس ترکیب سی قواعد نیپری خیال کریں تو ہر یک قاعدہ سی خواص غیر متشابہ ایک مثلث کے
نہیں ثابت ہوتی بلکہ خواص متشابہ پانچ متحد مثلثوں کے ثابت ہوتی ہیں

(۶۹) نیپر صاحب نی اپنی کتاب میں جو شکل کھینچی ہی جسکی نقل اوپر ہم نی اتاری ہی مگر اوسمیں حرفوں کا
اختلاف ہے نیپر صاحب لکھتی ہیں کہ اس شکل سی بہی صداقت اور صحت قواعد کی ثابت ہوتی ہے
اور ترکیب استقرائی بہی اونکا صحیح ہونا اسطرح ثابت ہی کہ جتنی صورتیں واقع ہوں اون سب پر خیال کریں
ڈی ایس ڈیوس صاحب نی ہٹن صاحب کی کتاب میں نیپر صاحب کا ثبوت بہ تفصیل شکل مذکور رسم
کرکے تمام نیپر صاحب کی خیالات لکھی ہیں اور اثبات کو بہت ضبط اور بسط کے ساتھہ اوس شکل سے لکھا ہے
ہم کو اسکی ضرورت تو کچھہ نہیں معلوم ہوتی کہ شکل کو بالکل معرض امتحان میں لائیں بلکہ یہہ حال
معلوم ہوتا ہی کہ مثلث ا ی د اور مثلث ا ب س میں جو تعلق اور ربط ہی اوسی بحث کریں
اسواسطی فرض کرو کہ طا و طب و طس و طا۱ و طب۱ و طس۱ اصل اجزاء مثلث کو بالترتیب تعبیر کرتے ہیں

اور اس ترتیب مین وتر اول ہی اور زاویہ قائمہ کو بالکل چھوڑ دیا ہی تو اصلی اجزاء مثلث ای د
کے وتر سی شروع ہو کر اور قائمہ کو چھوڑ کر بالترتیب یہہ ہونگی کپ/۲ - طا۳ دکپ/۲ - طا۴ وکپ/۲ - طا۵
وکپ/۲ - طا۱ اور طا۲ اسیواسطے اگر اول مقادیر مین تمیز پیدا کرنی ہو تو ایک سلسلہ مقادیر کا ق۱ وق۲
وق۳ وق۴ وق۵ داخل کرین پس طا۱ + ق۱ = طا۲ + ق۲ = طا۵ + ق۵ = کپ/۲ اور ق۳ = طا۳
اور ق۴ = طا۴ پس اگر اصلی مثلث کی تخصیص ق۱ وق۲ وق۳ وق۴ سے کیجای تو دوسری
مثلث کی ق۳ وق۴ وق۵ وق۱ وق۲ سی تخصیص ہوگی اور اسی طرح سی دوسرے مثلث سی تیسرا
مثلث پیدا ہوگا اور علی ہذا القیاس اسواسطی ہم ہر مثلث قایم الزاویہ کو ایک مجموعہ پانچ مثلثون کا
خیال کر سکتی ہین جنمین سی ہریک مخصوص ان پانچ مقادیر ق۱ وق۲ وق۳ وق۴ وق۵ سی ہے
جنمین سی باری باری سی ترتیب مین ہریک اول لیا جای

(۷۰) قواعد نیپری سی جو فواید عملیات مین حاصل ہوتی ہین اوسمین مہندسین مختلف الرای ہین
وڈہ ہوس صاحب لکہتی ہین کہ سارے علم ریاضی مین کوئی ایسی اور دو قاعدی مختصر اور آسان نہین ہین
جیسی کہ نیپر صاحب کی یہہ قاعدی ہین قاعدہ کی بڑی خوبیان یہی ہین کہ وہ آسان اور مختصر ہون اور اونکی
اعمال مین تطویل نہ ہو ایری صاحب اپنی علم مثلث کی رسالہ مین یہہ ایک فقرہ لکہتی ہین کہ ڈلمبر صاحب
بڑی تجربہ کار تہی اونکی رای بڑا اعتبار اس معاملہ پر رکہتی ہی وہ یہہ لکہتی ہین کہ عامل اور محاسب
کو یہہ قاعدی بغیر کسی تعلق کی خوب یاد رہ سکتی ہین محاسب ان قواعد کو اوس صورت مین کہ وہ کسی اور سی
کچہہ تعلق نہین رکہتی بہت اچہی طرح یاد رکہتا ہی پروفیسر ڈی مورگن نیپر صاحب کی قواعد پر بڑا
اعتراض کرتی ہین اور اپنی علم مثلث کروی مین تحریر فرماتی ہین کہ قواعد نیپری اجزاء مدور کی اسم اس سبب سی
نہین لکہتی کہ وہ حافظہ مین بڑا انتشار پیدا کرتی ہین گو اور مہندسین نی یہہ لکہا ہی کہ اونسی اس مطلب
کے یاد رکہنی مین بڑی امداد حافظہ کی ہوتی ہے

(۷۱) اب ہم دفعہ ۶۲ کی صور قانونی کو مثلث قایم الزاویہ کی حل کرنے مین کام مین لائینگے یہہ
ہم نی فرض کر لیا ہی کہ مقادیر معلومہ اون حدود کی درمیان واقع ہین جو دفعات ۲۲ و ۲۳

مین بیان کی گئی ہین یعنی ضلع معلوم محیط دائرہ عظیم سی اور ہر یک زاویہ دو قائموں سی کم ہی —
چہہ صورتین ہین جنکا بیان ہوتا ہے

(۷۲) وتر طس اور زاویہ ا معلوم ہے

(۳) و (۵) اور (۲) دفعہ ۶۲ سے

مس طب = مس طس جم ا و مم ب = جم طس مس ا اور جب طا = جب طس جب ا

ان سی طب اور ب بغیر اشتباہ کی معلوم ہوجائینگی اور طا متحد الصفت ا کا بموجب دفعہ ۶۴ کی ہے
تو طا بھی بغیر شبہہ کے دریافت ہوجایگا

اب اس حل کی حالتوں کی دیکھنی سی معلوم ہوتا ہی کہ وہ ہمیشہ ممکن ہے

اگر طس اور ا دونو قایمی ہون تو طا ایک قائمہ ہوگا اور طب اور ب غیر المعین ہونگے

(۷۳) ایک ضلع طب اور متصل کا زاویہ ا معلوم ہے

دفعہ ۶۲ کے (۳) (۴) (۶) کے موافق

مس طس = مس طب / جم ا اور مس طا = مس ا جب طب اور جم ب = جم طب جب ا

انسی طس و طا و ب دریافت ہوجائینگے اور کوئی شبہہ اونکی معلوم ہونی مین نہین ہی گا اور ایسا مثلث ہمیشہ ممکن

(۷۴) دو ضلعے طا و طب معلوم ہین

دفعہ ۶۲ کے (۱) و (۴) کے مطابق

جم طس = جم طا جم طب و مم ا = مم طا جب طب اور مم ب = مم طب جب طا

یہان طس اور ا اور ب بغیر کسی شک کی دریافت ہوجائینگے اور ایسا مثلث ہمیشہ ممکن ہے

(۷۵) وتر طس اور ضلع طا معلوم ہین

دفعہ ۶۲ کے (۱) (۳) (۲) کے مطابق

جم طب = جم طس / جم طا و جم ب = مس طا / مس طس و جم ا = جب طا / جب طس

یہان طب و ب اور ا بھی کسی شبہ کی دریافت ہونگی اسواسطی کہ ا اور طا متحد الصفت ہین

ان صور قانونیہ مین ہمیشہ مثلث کی ممکن الوجود ہونی کی لئی معطیات کی حدود ہوتی ہین اون پر توجہ ضرور چاہیے
مثلاً یہان اس حل کی صورت مین طس درمیان طا اور ک۔طا کی واقع ہونا چاہئی تاکہ قیمتین جم طب
وجم ب اور جب ب کی تعداد مین بڑی واحد سی نہ ہون
اگر طس اور طا زاوئی قائمی ہین تو ا ایک قائمہ ہی اور طب اور ب کا اس صورت مین کچھ تعین نہین ہو سکتا وہ غیر المعین ہی،

(۷۶) دو زاوئی ا اور ب معلوم ہین
یہان دفعہ ۶۲ کے (۵) (۶) کے موافق

جم طس = مم ا مم ب اور جم طا = جم ا / جب ب اور جم طب = جم ب / جب ا

یہان طس اور طا اور طب بغیر کسی شبہ کی دریافت ہوگئی اب یہان معطیات کی حدود پر مثلث کے
ممکن الوجود ہونی کی واسطی غور کرنی چاہی اول فرض کرو کہ ا کم ک/۲ سی ہی تو ب درمیان ک/۲ - ا اور
ک/۲ + ا کی واقع ہی دوم فرض کرو کہ ا بڑا ک/۲ سی ہی تو ب درمیان ک/۲ - (ک - ا) اور ک/۲ +
(ک - ا) یعنی درمیان ا - ک/۲ اور ۳ک/۲ - ا کے واقع ہون

(۷۷) ایک ضلع طا اور اوسکے مقابل کا زاویہ ا معلوم ہے
یہان دفعہ ۶۲ کے (۲) (۴) (۶) کے موافق

جب طس = جب طا / جب ا اور جب طب = مس طا مم ا اور جب ب = جم ا / جم طا

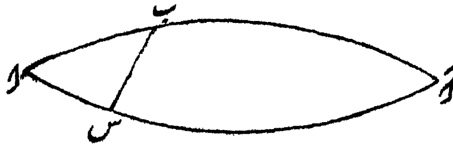
یہان ایک شبہ کا مقام ہی اسلیے کہ اجزاء بوساطت اونکی جیوب کی دریافت ہوئی ہین
اگر جب طا کم جب ا سی ہو تو طس کی دو قیمتین داخل ہو سکتی ہین اور ان دو قیمتون مین سے
ہر ایک قیمت کی مطابق اکثر ایک قیمت طب کی دریافت ہوگی کیونکہ جم طس = جم طا جم طب کی ہی
اور ایک قیمت ب کی داخل ہوسکیگی کیونکہ جم طس = مم ا مم ب
اسی معلوم ہوا کہ اگر ایک مثلث ممکن الوجود موافق ان اجزاء معلومہ کی ہو تو اکثر دوسرا مثلث
بھی ہوگا اور صرف دو ہی مثلث ایسی ہو سکتی ہین کہ اونکی اجزاء معلومہ ایک ہی ہو
ہم نی لفظ اکثر کا اوپر لکھا ہی کیونکہ یہہ کچھ ضرور نہین کہ ہمیشہ دو ہی مثلث ہوا کرین بعض

صورتین مستثنےٰ ہین اول یہہ کہ

طا = ا کے ہو تو اس صورت مین ایک ہی مثلث ہوگا اگر طا و طب مین سے ہر یک قائمہ نہ ہو

تو طب او عب نہین معین ہو سکتے وہ غیر متعین رہینگے

شکل کی دیکھنی سی اس حل کا مشتبہہ ہونا باسانی سمجھہ مین آئیگا



اسواسطی کہ فرض کرو موافق شرائط معلومہ کی اب س ایک مثلث ہی اب اور اس کو خارج کر نقطہ اَ تک

تک کہینچی تو مثلث اَب س بہی شرائط معلومہ کی موافق ایک اور مثلث ہوگا اسواسطے کہ اوسمین س پر زاویہ

قایمہ ہی اور ب س ضلع معلوم ہی اور اَ = ا زاویہ معلوم کے

اگر طا = ا تو صور حل سی ثابت ہوتا ہی کہ طس اور طب اور ب قائم زاوئی ہین اس صورت مین ا

قطب ب س کا ہی اور مثلث اَب س مساوات یا القرینہ مثلث اب س کی ساتہہ موافق دفعہ ۵ کی رکہتا ہے

اگر طا اور ا دونو قائی ہین تو ب قطب اس کا ہی اور ب اور طب برابر ہین مگر اونکے قیمت

کا کچہہ ٹہکانا نہین سب کچہہ ہوسکتی ہے

ان معطیات کی حدود مین جبسی کہ مثلث کا امکان معلوم ہوتا ہی — بموجب دفعہ ۴۴ کے

ا اور طب متحد الصفت ہونی چاہی اسی معلوم ہوتا ہی کہ صور قانونیہ حل مین طا چہوٹا اوسی ہونا چاہیگا

اگر دونو حادی ہین اور بہ نسبت ا کی بڑا ہونا چاہی اگر دونو منفرجی ہین

اگر اب س مثلث ہو جسمین زاویہ س قائمہ ہو تو اسی دفعہ تک کی مثالون مین ثابت کرو کہ یہہ تعلقات ہوتی ہین

(۱) جب^2 طس/۲ = جب^2 طا/۲ جم^2 طب/۲ + جم^2 طا/۲ جب^2 طب/۲

(۲) مس ۱/۲ (طس + طا) مس ۱/۲ (طس − طا) = مس^2 طب/۲

(۳) جب (طس − طب) = مس^2 ا/۲ جب (طس + طب)

(۴) جب طا مس $\frac{1}{2}$ ا - جب طب مس $\frac{1}{2}$ ب = جب (طا - طب)

(۵) جب (طس - طا) = جب طب جم طا مس $\frac{1}{2}$ ب

جب (طس - طا) = مس طب جم طس مس $\frac{1}{2}$ ب

(۶) اگر ا ب س مثلث کروی ہو اور س اوسمین زاویہ قایمہ ہو اور جم ا = جم^2 طا تو ثابت کرو کہ اگر ا قایمہ نہو

تو طب + طس = $\frac{1}{2}$ ک

بشرطیکہ طب اور طس دونو کم $\frac{1}{2}$ک سی ہون اور طا + طس = $\frac{3}{2}$ک کی بشرطیکہ طب اور طس دونو بڑی $\frac{1}{2}$ک کی ہون

(۷) اگر سہ اور صہ قوسین ہی ایک عمود وتر طس پر ہو اور دوسرے اوسکی تنصیف کری تو ثابت کرو کہ

جب $\frac{\text{طس}}{2}$ $\sqrt{(۱ + \text{جب}^2 \text{ طا})}$ = جب صہ

(۸) مثلث مین اگر س قائمہ ہو اور د نقطہ وسط ا ب کا ہو تو ثابت کرو کہ

۴ جم^2 $\frac{\text{طس}}{2}$ جب^2 س د = جب^2 طا + جب^2 طب

(۹) مثلث قایم الزاویہ مین اگر ح طول اوس قوس کا ہو جو س سی وتر ا ب پر عمود نکالی جاے تو ثابت کرو کہ

مم ح = $\sqrt{(\text{مم}^2 \text{ طا} + \text{مم}^2 \text{ طب})}$

(۱۰) ء ا ا$_1$ مثلث قایم الزاویہ کروی ہی جسکا زاویہ ا$_1$ قائمہ ہی اور ا حادہ ہی ا$_1$ ا$_2$ قوس دایرہ عظیم کی عمود ء ا پر کہینچی گئی ہی اور ا$_2$ ا$_3$ عمود ء ا$_1$ پر اور علی ہذا القیاس تو ثابت کرو کہ ا$_ن$ ا$_{ن-1}$ فنا ہو جایگی جب ن لانہایت ہو اور دریافت کرو قیمت

جم ا ا$_1$ جم ا$_1$ ا$_2$ جم ا$_2$ ا$_3$ . . . لانہایت کی

(۱۱) ا ب س ایک مثلث کروی قایم الزاویہ ہی اور ا زاویہ قائمہ نہین ہی تو ثابت کرو کہ اگر ا = طا

تو طس اور طب ربعات ہین

(۱۲) اگر ح طول اوس قوس کا ہو جو س سی عمود ا ب پر کسی مثلث مین نکالا جاے تو ثابت کرو کہ

جم ح = مم طس (جم^2 طا + جم^2 طب - ۲ جم طا جم طب جم طس)$^{\frac{1}{2}}$

(۱۳) کرہ کا ا ب مین دائرہ عظیم ہی ا ا' اور ب ب' اور س س' قوسین دائرہ عظیم کے ہین

اور اب س کی ساتھہ زاویے قائمہ بناتی ہین اور مثبت شمار اوس حالت مین کیے گیے ہین کہ ایک ہی
طرف اوسکی واقع ہون تو ثابت کرو کہ اَ دبَ اور سَ دائرہ عظیم پر جب واقع ہونگی کہ

مس ااَ جب س سَ + مس ب بَ جب س ا + مس س سَ جب ا ب = ۰

(۱۴) مثلث کی زاویون ا و ب و س سی عمود مقابل کی اضلاع پر نکالی گئی ہین اور نقاط د و ی و ف پر ملتی ہین
تو ثابت کرو کہ مس ب د مس س ی مس ا ف = مس د س مس ی ا مس ف ب

(۱۵) د لا اور د ی ایک کرہ کی دو دائرہ عظیمہ ہین اور آپسمین ایک دوسرے کی ساتھہ زاویے قائمہ بناتی ہین
نقطہ ق ایک اور دائرہ عظیم اب مین ہی د س = ق کی ایک قوس عمود اب پر نقطہ د سی ہی اور زاویہ
س د لا = سہ کے د لا کی ساتھہ بناتا ہی ق م اور ق ن قوسین عمود د لا و د ی پر ہین تو ثابت کرو کہ اگر

د م = لا اور د ن = د لو

جم بہہ مس لا + جب بہہ مس د = مس ق

(۱۶) مقام ایک نقطہ کا کرہ پر بلحاظ دو دوائر عظیمہ متقاطع علی القوایم کی متعین کیا گیا ہی اور یہہ
دونو دائرہ بمنزلہ محورون کے ہین اور دو دائرہ عظیمہ کی قوسین جو اوس نقطہ پر اور اور محور کی دو نقطون
پر جو اونکی نقطہ تقاطع سی $\frac{\pi}{2}$ فاصلہ پر ملتی ہین گذرتی ہین تو ثابت کرو کہ اگر نقطی (بر و سر) اور (برَ و سرَ)
اور (برً و سرً) ایک ہی دائرہ عظیم مین واقع ہون تو

مس سر (مس برَ ـ مس برً) + مس سرَ (مس برً ـ مس بر) + مس سرً (مس بر ـ مس برَ) = ۰

(۱۷) اگر دو دوائر عظیمہ متقاطع علی القوام قایم مقام محورون کی ہون اور کرہ پر ایک نقطہ ن دوائر
لحاظ سی بوساطت اجزاء ان محورون کی مقرر کیا جاے اور یہہ محور دوائر عظیمہ سی جو اس نقطہ
اور اون دو نقطون پر محور کی جنکا فاصلہ نقطہ تقاطع سی $\frac{\pi}{2}$ ہو تو ثابت کرو کہ مساوات دائرہ عظیم کی یہہ ہے

مس بر م سہ + مس سر م صہ = اَ

(۱۸) مثلث مین اگر ا = $\frac{\pi}{5}$ ، ب = $\frac{\pi}{3}$ اور س = $\frac{\pi}{2}$ تو ثابت کرو کہ طا + طب + طس = $\frac{\pi}{2}$

باب ششم حل مثلثات غیر قائم الزاویہ کا

(۷۸) بعض خاص صورتین مثلث غیر قایم الزاویہ کی حل کی ایسی بھی ہوتی ہین کہ وہ مثلث قایم الزاویہ کی حل کی استعانت سی حل ہوجاتی ہین اول ہم یہہ خاص صورتین لکھتی ہین اور بعد ازان تمام صورتین مثلث غیر قایم الزاویہ کے تحریر کرینگے

(۱) فرض کرو کہ ایک مثلث کی اضلاع معلومہ مین سی ایک ضلع برابر ربعہ دائرہ کی ہی — اس صورت مین مثلث قطبی مین زاویہ مذکور کی مطابق قائمہ ہوگا تو پہلی باب کے قواعد کی موافق مثلث قطبی حل ہوجائیگا اور اسطرح مثلث اولی کی اجزاء ترکیبی معلوم ہوجائینگے

(۲) فرض کرو کہ اجزاء معلومہ مین ایک مثلث کی دو برابر ضلعی ہین یا دو برابر زاویی — پس ایک قوس راس سی نقطہ وسط قاعدہ مین کھنچو تو مثلث دو برابر مثلثون قایم الزاویہ مین تقسیم ہوجائیگا تو ان مثلثون مین سی ایک مثلث کی معلوم ہونی سی اجزاء مطلوب معلوم ہوجائینگے

(۳) فرض کرو کہ اجزاء معلومہ مثلث مین سی دو ضلعی ایسی ہین کہ ایک تکملہ دوسرے کا ہی یا دو زاویی ایسی ہین کہ ایک انمین کا تکملہ دوسرے کا ہی مثلا فرض کرو کہ طب + طس = ک یا ب + س = ک خارج کرو ب ا اور ب س کو جو نقطہ ب ملین (دفعہ ۳۸ کی اول شکل دیکھو) تو مثلث ب ا س کے دو برابر اضلاع یا دو برابر زاویی معلوم ہونگی تو بموجب صورت بالا کی مثلث کا حل مثلث قایم الزاویہ کے حل پر منحصر ہوجائیگا

(۷۹) اب ہم تمام صورتین مثلث غیر قایم الزاویہ کی حل کرتی ہین اونکی چھہ صورتین ہین

(۸۰) تینون ضلعی معلوم ہین

ہم کو معلوم ہی جم ا = (جم طا − جم طب جم طس) / (جب طب جب طس) اور علی ہذا القیاس جم ب اور جم س کی کیفیت ہی اور اگر ہم ایسی صور کو کام مین لانا چاہین کہ جنکا حساب لوگارثم سی باسانی ہوسکی تو ہم کو صور جیب و جیب التمام یا مماس نصف زاویہ کی بموجب دفعہ ۴۵ کی کام مین لانی چاہیی ہر صورت کی انتخاب مین علم مثلث مستقیمۃ الاضلاع کی دفعہ ۴۵ پر لحاظ چاہیی

(۸۱) تینون زاویی معلوم ہین

یہان ہم کو معلوم ہی کہ جم طا = $\frac{\text{جم ا + جم ب جم س}}{\text{جب ب جب س}}$ اور ایسی ہی صورتین جم طب و جم طس کے لئی دریافت کرو
اگر ہم ایسی صور کو کام مین لانا چاہین کہ اوسکا حساب لوگارثم سی باسانی ہوسکی تو دفعہ ۴۹ کے
جیب و جیب التمام یا مماس نصف اضلاع کو کام مین لانا چاہئی
کوئی شبہ کا مقام ان دو مثلثون کی حل مین نہین ہی لیکن اجزا معلومہ ایسی ہوسکتی ہین
کہ جنسی مثلث کا بنانا ممکن ہو

(۸۲) دو ضلعی اور زاویہ درمیانی اوسکا (طا و س طب) معلوم ہین

متماثلات نیپری سے

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}(\text{ا + ب}) = \frac{\text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{طا − طب})}{\text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{طا + طب})} \text{ مم } \tfrac{1}{2}\text{س}$$

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}(\text{ا − ب}) = \frac{\text{جب } \tfrac{1}{2}(\text{طا − طب})}{\text{جب } \tfrac{1}{2}(\text{طا + طب})} \text{ مم } \tfrac{1}{2}\text{س}$$

انسے $\tfrac{1}{2}$ (ا + ب) اور $\tfrac{1}{2}$ (ا − ب) معلوم ہوجائینگے اور اونسی ا اور ب دریافت ہوجائینگے
پہر طس اس صورت سی دریافت ہوجایگا کہ

$$\text{جب طس} = \frac{\text{جب طا جب س}}{\text{جب ا}}$$

اس صورت مین چونکہ طس اوسکی جیب سی معلوم ہوتا ہی اس سبب سے یہہ نہین تحقیق ہوسکیگا کہ دو
قیمتون مین سی کونسی قیمت اوسکی حساب مین لائین کبہی کبہی اس بات کا فیصلہ اسطرح ہی ہوجاتا ہے
کہ بڑا ضلع مثلث کا مقابل بڑی زاویہ کی ہوتا ہی یا ہم طس کو مساوات (۱) دفعہ ۵۴ سی دریافت کرین
جسمین شبہ کا کوئی مقام نہین ہے
یا ہم طس کو پہلی ا اور ب کی معلوم کرنی سی دریافت کرین اس صورت

$$\text{جم طس} = \text{جم طا جم طب} + \text{جب طا جب طس جب طس}$$

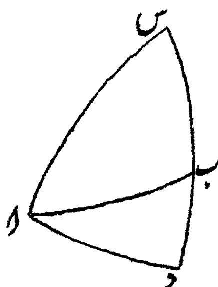
اس مین کوئی شبہ کی جگہ نہین ہی ۔ یہہ صورت لوگارثم کے لایق اسطرح ہوسکتی کہ

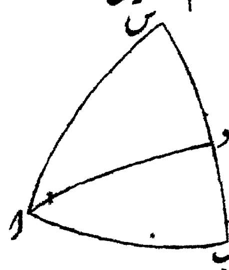
$$\text{جم طس} = \text{جم طب (جم طا + جب طا مس طب جم س)}$$

فرض کرو کہ مس بر = مس طب جم س تو

مم طس = جم طب (جم طا + جب امس بر) = جم طب جم (طا − بر) / جم بر

پس یہہ لوکارثم کے لایق ہوگئی





یا ہم اس صورت کو اسطرح حل کرین کہ مثلث کی تحویل دو مثلث قایم الزاویہ کی مجموعہ یا تفاوت کی طرف کرلین نقطہ ا سی قوس ا د عمود س ب پر یا س ب خارج شدہ پر لٹکالو بموجب دفعہ ۶۲ کی

مس س د = مس طب جم س اسے س د معلوم ہوگا اور پہر ب د دریافت ہوجالیگا۔ پہر بموجب دفعہ ۶۲

جم طس = جم ا د جم د ب = جم د ب جم طب / جم س د

اسے طس کو معلوم کرتے ہین

یہہ ظاہر ہی کہ س د وہ ہی جو دفعہ کے اول ہی مین بر سے تعبیر ہوا تہا

بموجب دفعہ ۶۲ کے

مس ا د = مس س جب س د اور مس ا د = مس ا ب جب د ب

پس مس ا ب جب د ب = مس س جب بر

جہان د ب = طا − بر جب س ب پر د ہو اور د ب = بر − طا جب خارج شدہ س ب پر گرتا ہو ہو اور ا ب د کیا یہی یا تکملہ ب کا اس صورت سی ب کو بغیر کسی تعلق ا کی دریافت کرسکتے ہین

پس اس صورت مین کوئی اصلی شبہ نہین ہی اور مثلث کا بنا ہمیشہ ممکن ہی

(۸۳) دو زاوئی اور اونکی درمیان کا ضلع (ا و طس و ب) معلوم ہین

تمثیلات نیپری سے

مس ½ (طا + طب) = جم ½ (ا − ب) / [illegible] مس ½ طس

مس ½ (طا ـ طب) = (جب ½ (ا ـ ب) / جب ½ (ا ـ ب)) مس ½ طس

انسے ½ (طا + طب) و ½ (طا ـ طب) دریافت ہونگی اور پہر اونسی طا اور طب معلوم ہونگے

پہر س اس صورت جب س = جب ا جب طس / جب طا سے معلوم ہوجایگا

اس صورت مین چونکہ س اوسکی جیب سی دریافت ہوتاہی اسلئی یہہ پہلے تحقیق ہوسکتاہی کہ اوسکی دو قیمتون مین سی کونسی قیمت لینی چاہئی بعض اوقات اس بات کا اسطرح فیصلہ ہوجاتاہی کہ بڑا زاویہ مقابل بڑی ضلع کی ہوتاہی یاہم س کو مساوات (۳) دفعہ ۸۵ سی دریافت کرین جو شبہ سی بالکل خالی ہے یاہم س کو پہلی طا اور طب کی دریافت کرنے سی اس صورت سے دریافت کرین

جم س = ـ جم ا جم ب + جب ا جب ب جم طس

یہہ لوکارتم لینے کے قابل اسطرح ہوسکتی ہے کہ

جم س = جم ب (ـ جم ا + جب ا مس ب جم طس)

فرض کروکہ مم سر = مس ب جم طس تو

جم س = جم ب (ـ جم ا + مم سر جب ا) = جم ب جب (ا ـ سر) / جب سر

پس یہہ قابل لوکارتم لینی کی ہے

یاہم اس صورت کو اسطرح حل کرین کہ مثلث کی تحویل دو قایم الزاویہ مثلثون کی مجموعہ یا تفاوت کی طرف کرین نقطہ ا سی قوس ا د عمود س ب پر نکالین (دفعہ ۸۲ کی داہئین طرف کی شکل دیکہو)

تو بموجب دفعہ ۶۲ کے جم طس = مم ب مم د ا ب

اسی د ا ب دریافت ہوتاہی اور پہر اوسی س ا د معلوم ہوجایگا اور پہر بموجب دفعہ ۶۲ کے

جم ا د جب س ا د = جم س اور جم ا د جب ب ا د = جم ب

اسیواسطے جم س / جب س ا د = جم ب / جب ب ا د انسے س دریافت ہوتاہے

اب یہہ ظاہر ہی کہ آغاز دفعہ مین جو کچہہ سر سی تعبیر ہوا تہا وہ د ا ب ہے

بموجب دفعہ ۶۲ کے

مس ا د = مس ا س جم س ا د اور مس ا د = مس ا ب جم ب ا د کے

پس مس طب جم س ا د = مس طس جم سر

جہاں س ا د = ا ـ سر اس صورت سی ہم کو طب معلوم ہوتا ہے

علی ہذالقیاس اسیطرح عمل کرو کہ ا د خارج شدہ س د پر واقع ہو (دفعہ ۸۲ کی بائیں طرف کی شکل دیکھو)

پس اس صورت میں کوئی مقام شبہ کا نہیں ہے اور مثلث کا بنا ہمیشہ ممکن ہے

(۸۴) دو ضلعے اور ایک زاویہ مقابل ضلع کا (طا و طب و ا) معلوم ہیں

زاویہ ب تو اس صورت سی معلوم ہوگا

$$\text{جب ب} = \frac{\text{جب طب}}{\text{جب طا}}\ \text{جب ا}$$

اور پھر س اور طس ان تمثیلات نیپری سے کہ

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ س} = \frac{\text{جم } \tfrac{1}{2}\ (\text{طا} - \text{طب})}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\ (\text{طا} + \text{طب})}\ \text{مم } \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} + \text{ب})$$

$$\text{مس } \tfrac{1}{2}\text{ طس} = \frac{\text{جم } \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} + \text{ب})}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\ (\text{ا} - \text{ب})}\ \text{مس } \tfrac{1}{2}\ (\text{طا} + \text{طب})$$

اس صورت میں چونکہ ب اسکی جیب سی دریافت ہوتی ہی اسلئے بعض اوقات دو حل ہونگی اور بعض اوقات

ایک حل ہی نہیں ہوگا جب قیمت جیب ا کی ایک سے بڑی ہوگی اوسوقت کوئی حل نہ ہوگا

بغیر کسی تعلق کی ب کی ساتھ ہم س اور طس کو دریافت کرتے ہیں (دفعہ ۸۶ دیکھو)

بموجب دفعہ ۴۴ کے

$$\text{جم طا جب طب} = \text{جم طب جم س} + \text{جب س مم ا} = \text{جب طب}\left(\text{جم س} + \frac{\text{مم ا}}{\text{جم طب}}\ \text{جب س}\right)$$

فرض کرو کہ $\text{مس سر} = \frac{\text{مم ا}}{\text{جم طب}}$ تو

$$\text{مم طا جب طب} = \text{جم طب}\ (\text{جم س} + \text{مس سر جب س}) = \frac{\text{جم طب جم}\ (\text{س} - \text{سر})}{\text{جم سر}}$$

$$\text{جم}\ (\text{س} - \text{سر}) = \text{جم سر مم طا مس طب}$$

اس مساوات سی س ـ سر دریافت ہوگا اور پھر اوسی میں معلوم ہوگا اوسمیں ایک شبہ رہی گا

اسلئی کہ آخر مساوات سی اگر س - سر = ط کے دریافت ہوتا ہی تو سر - س = ط مساوات کی ایٔ شرایط پوری ہونگیں اسواسطی قیمتیں س کی دو ہوئیں جو ٹہیک لگ سکتی ہیں اگر سر + ط کم بہ نسبت کہ کی ہی اور سر - ط مثبت ہے اور

جم طا = جم طب جم طس + جب طب جب طس جم ا = جم طب (جم طس + جب طس جب طب جم ا)

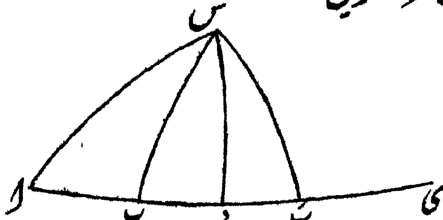
فرض کرو کہ مس بر = مس طب جم ا پس اسطرح

جم طا = جم طب (جم طس + جب طس مس پر) = جم طب جم (طس - بر) / جم بر

اسیواسطے

جم (طس - بر) = جم طا جم بر / جم طب

اس مساوات سی طس - بر دریافت ہوگا اور پہر اوسی طس معلوم ہوگا یہاں بہی وہی شبہ رہیگا جیسا کہ پہلے تہا یا ہم اس صورت کو ہاتی سی اسطرح حل کر سکتی ہیں کہ مثلث کی تحویل دو مثلث قایم الزاویہ کے مجموعہ یا تفاوت کی طرف کریں



فرض کرو کہ س ا = طب اور س ا ی = زاویہ معلوم اکے نقطہ س سی س د عمود ا ی تک کہنچو اور س ب اور س ب = طا پس شکل کی دیکہنی سی معلوم ہوتا ہی کہ دو مثلث ایسی ہو سکتی ہیں کہ جو اجزا معلوم نہ رکہیں پس بموجب دفعہ ۶۲ کی جم طب = جم ا جم ا س د اسی ا س د معلوم ہوتا ہے پہر بموجب دفعہ ۶۲ کے

مس س د = مس ا س . جم ا س د

اور مس س د = مس س ب جم ب س د یا مس س ب . جم ب س د

اسیواسطے مس ا س جم ا س د = مس س ب جم ب س د یا مس س ب جم ب س د

اسسے ب س د یا بَ س د معلوم ہوتا ہے

اب یہہ ظاہر ہی کہ اخر دفعہ کے اغاز مین جو کچھہ سر سے تعبیر ہوا تہا وہ اس د ہے

اور نیز بموجب دفعہ ۶۲ مس ا د = مس ا س جم ا اسی ا د دریافت ہوتا ہے

اور جم ا س = جم س د جم ا د و جم س ب = جم س د جم ب د

یا جم س بَ = جم س د جم بَ د

اسیواسطے (جم ا س / جم ا د) = (جم س ب / جم ب د) یا (جم ا س بَ / جم بَ د)

اسی ب د یا بَ د دریافت ہوتا ہے

یہہ ظاہر ہی کہ دفعہ گذشتہ کی شروع میں جو کچھہ برسی تعبیر ہوا تہا وہ ا د ب ہے

(۸۵) دو زاویئی اور انمین سی ایک زاویہ کی مقابل کا ضلع (ا و ب وطا) معلوم ہیں

یہہ صورت مشتبہ ہونی میں مشابہت صورت بالاسی رکہتی ہی — ضلع طب تو اس صورت

جب طب = (جب ب جب طا / جب ا) سی اور طس اور س تمثیلات نیپری سی دریافت ہوتے ہیں

مس ½ س = (جم ½ (طا − طب) / جم ½ (طا + طب)) مم ½ (ا + ب)

مس ½ طس = (جم ½ (ا + ب) / جم ½ (ا − ب)) مس ½ (طا + طب)

ہم طب سی بالکل بی لگاؤ س اور طس کو دریافت کر سکتی ہیں اور اسطرح دریافت کر سکتی ہیں کہ وہ حساب

لوکارثمی کی قابلیت رکھیں — اسواسطی کہ

جم ا = − جم ب جم س + جب ب جب س جم طا

= جم ب (− جم س + مس ب جب س جم طا)

فرض کرو کہ مم سر = مس ب جم طا پس

جم ا = جم ب (− جم س + جب س مم سر) = (جم ب جب (س − سر) / جب سر)

اسیواسطی جب (س − سر) = (جم ا جب سر / جم ب)

اس مساوات سی س – سر معلوم ہوتا ہی اور پہر اوسی س دریافت ہوتا ہی چونکہ س – سر اوسکی جیب سے دریافت ہوتا ہی اسلئے شبہہ واقع ہوگا

اب پہر موافق دفعہ ۸۴ کے

مم ا جب ب = مم طا جب طس – جم طس جم ب = جم ب (– جم طس + مم طا جب طس / جم ب)

فرض کرو کہ مم بر = مم طا / جم ب تو

مم ا جب ب = جم ب (– جم طس + جب طس جم بر) = جم ب جب (طس – بر) / جب بر

اسیواسطی جب (طس – بر) = مم ا مس ب جب بر

اس مساوات سی طس – بر دریافت ہوتا ہی اور پہر اوسی طس معلوم ہوتا ہی چونکہ طس – بر اوسکی جب سی معلوم ہوتا ہی اسلئے اشتباہ ہوسکتا ہی – اگر ہم مثلث کی تحویل دو قایم الزاویہ مثلثون کی مجموعہ یا تفاوت کی طرف کرین تو نتایج مطابق ان نتایج کی پیدا ہونگی اسواسطی کہ اگر مثلث ا س ب مین قوس س د عمود ا ب پر لگائی جائین تو ب س د = بر اور ب د = بر

(۸۶) اب ہم اوس اشتباہ پر بحث کرتی ہین جو دفعہ ۸۴ کی صورت مین واقع ہوئی کہ دو ضلعی اور ان ضلعون مین سی ایک ضلع کا مقابل کا زاویہ معلوم ہو – اگرچہ اوسکی بحث طول طویل ہے اور اس طوالت سی طبیعت کو ملال ہوتا ہی مگر اوسمین کچہہ اشکال نہین

اب ہم تمام صورت کو چہوڑ کر اول اوسکی ایک خاص صورت لیتی ہین جسمین طا = طب تو چاہیے کہ ا = ب اور اول اور سوم تمثیلات نیپری سے

مم ۱/۲ س = مس ا جم طا اور مس ۱/۲ طس = مس طا جم ا

اب مم ۱/۲ س اور مس ۱/۲ طس دونو مثبت ہون تاکہ طا اور ا متحد الصفت ہون

اسی معلوم ہوا کہ جسوقت طا = طب تو کوئی حل نہ ہوگا اگر ا اور طا ہم صفت نہ ہون اس صورت مین ایک حل ہوگا الا اوس صورت مین کہ ا اور طا قائمی ہون تو

مم ۱/۲ س اور مس ۱/۲ طس کچہہ متعلق نہ ہوسکینگی اور وہ غیر محصور ہو جائینگے اور اونکی حل لا تعد ہو جائینگے

اب ہم عام بحث کرتے ہین
اگر جب طب جب ا بڑا جب طا سی ہو تو کوئی مثلث ایسا نہین ہوگا جو شرائط معلومہ کو پورا کری — اگر جب طب جب ا بڑا جب طا سی نہ ہو تو مساوات

جب ب = جب طب جب ا / جب طا سی دو قیمتین ب کی دریافت ہونگین

جنکو ہم صہ اور صہَ سی تعبیر کرتی ہین اسطرح کہ صہَ = ک - صہ اب ہم فرض کرتی ہین کہ صہ الیقیمت ہجو دوسری قیمت سی بڑی نہین ہے

اب ب کے ان قیمتون کی داخل ہونی کی واسطی یہہ بات ضرور ہی کہ قیمتین مم ½ س اور مس ½ طس دونو مثبت ہون اور فقط یہی بات کافی ہی یعنی ا - ب اور طا - طب متحد العلامت ہو موجب دوم وچہارم تمثیلات نیپری کے ہون

اسیواسطے اب ہم کو مقابلہ کرنا علامت ا - صہ اور علامت ا - صہَ کا طا - طب کی علامت سی باقی ہی

اب ہم فرض کرتی ہین کہ ا قائمہ سی کم ہی اور اوسکی مطابق ہم اس بحث کو تین حصون مین تقسیم کرتی ہین

اول فرض کرو کہ طب کم بہ نسبت کہ کے ہو

(۱) فرض کرو طا کم بہ نسبت طب کی ہی تو صورت قانونی جب ب = جب طب / جب طا جب ا کی حکم سے صہ بڑا بہ نسبت ا کی ہوتا ہی تو صہَ بلا شبہ اولی بڑا اسی ہوگا - اسی معلوم ہوا کہ دو حل ہین

(۲) فرض کرو کہ طا برابر ہو طب کی تو ظاہر ہی کہ صرف ایک حل ہوگا جیسا کہ پہلی بیان ہوا

(۳) فرض کرو کہ طا بڑا طب سی ہی تو طا + طب کم کہ سی یا برابر کہ کی یا بڑا کہ سے ہوگا

اگر طا + طب کم بہ نسبت کہ کی ہی تو جب طا بڑی جب طب سی ہوگی پس صہ چہوٹا بہ نسبت ا کی ہوا اسلئی صہ داخل ہوسکتا ہی اور صہَ بڑا ا سی ہی اسلئی وہ داخل نہین ہوسکتا اسی معلوم ہوا کہ ایک حل ہی — اگر طا + طب برابر کہ کی ہی تو صہ برابر ا کے ہوا اور صہَ بڑی ا سی ہی اسلئی دونو نہین داخل ہوسکتی اسی معلوم ہوا کہ کوئی حل نہین ہے

اگر طا + طب بڑا کہ سی ہی تو جب طا چہوٹا بہ نسبت جب طب کی ہوگا اور صہ اور صہَ دونو بڑی

بہ نسبت ا کے ہیں اور دونو نہیں داخل ہو سکتی اسی ثابت ہوا کہ کوئی حل نہیں ہے

دوم فرض کرو کہ طب برابر کپ کے ہے

(۱) فرض کرو کہ طا کم بہ نسبت طب کی ہی تو صہ اور صہ دونو بڑی بہ نسبت ا کی ہوئی اور دونو داخل ہو سکتی ہیں اسی معلوم ہوا کہ دو حل ہیں

(۲) فرض کرو کہ طا برابر طب کی ہو تو کوئی حل نہ ہوگا جیسا کہ پہلی ثابت کیا ہے

(۳) فرض کرو کہ طا بڑا طب سی ہی تو جب طا چھوٹا جب طب سی ہی اور صہ اور صہ دونو بڑی بہ نسبت ا کی ہیں اور دونو نہیں داخل ہو سکتی اسی معلوم ہوا کہ کوئی حل نہیں ہے

سوم فرض کرو کہ طب بڑا کپ سے ہو

(۱) فرض کرو کہ طا چھوٹا بہ نسبت طب کی ہو تو طا + طب کیا چھوٹا یا برابر یا بڑا کہ سی ہوگا تو جب طا چھوٹا جب طب سی ہی اور صہ اور صہ دونو بڑی ا سی ہیں اور دونو داخل ہو سکتی ہیں اسلئی دو حل ہوئی

اگر طا + طب برابر کہ کی ہی تو صہ برابر ا کی ہی اور داخل نہیں ہو سکتا اور صہ بڑا بہ نسبت ا کے اسلئی داخل ہو سکتا ہی اسی ثابت ہوا کہ ایک حل ہی — اگر طا + طب بڑا کہ سی ہی تو جب طا بڑا جب طب سی اور صہ چھوٹا ا سی ہی اور داخل نہیں ہو سکتا اور صہ بڑا ا سی ہی اسلئی داخل ہو سکتا ہی اسی معلوم ہوا کہ ایک حل ہے

(۲) فرض کرو کہ طا برابر طب کی ہو تو پہلی ثابت کرائی ہیں کہ کوئی حل نہیں ہوگا

(۳) فرض کرو کہ طا بڑا طب سی ہی تو جب طا چھوٹی جب طب سی ہی اور صہ اور صہ دونو بڑی ا سی ہیں اور دونو نہیں داخل ہو سکتی اسی معلوم ہوا کہ کوئی حل نہیں ہے

پس نتایج مفصلہ ذیل ہم کو حاصل ہونگی اگر ا چھوٹا ایک قائمہ سے ہو

طب د ک/۲
- طا د طب . . . . . . دو حل
- طا = طب . . . . . . ایک حل
- طا ے طب اور طا + طب د کہ . . . ایک حل
- طا ے طب اور طا + طب = ک یا ے کہ کوئی حل نہیں

طب = ک/۲
- طا د طب . . . . دو حل
- طا = طب یا طا ے طب . . . . کوئی حل نہیں

طب ے ک/۲
- طا د طب اور طا + طب د ک . . . دو حل
- طا د طب اور طا + طب = ک یا ے ک ایک حل
- طا = طب یا ے طب کوئی حل نہیں

یہہ بھی یاد رکھنا چاہیی کہ اون صورتون مین جنمین دو حل ہین کوئی حل نہ ہوگا اگر جب طا چھوٹی بہ نسبت جب ا کی ہو اسیطرح اون صورتون مین کہ ا برابر ایک قائمہ کی اور بڑا ایک قائمہ سی ہی بحث ہو سکتی ہے اور نتایج مفصلہ ذیل حاصل ہو سکتی ہین

جب ا برابر ایک قائمہ کے ہو

طب د ک/۲
- طا د طب یا طا = طب کوئی حل نہین
- طا ے طب اور طا + طب د ک ایک حل
- طا ے طب اور طا + طب = ک یا ے ک . . . کوئی حل نہین

طب = ک/۲
- طا د طب یا طا ے طب . . . . . کوئی حل نہین
- طا = طب . . . . لاتعداد حل

طب ے ک/۲
- طا د طب اور طا + طب ے کہ . . . . . ایک حل
- طا د طب اور طا + طب = ک یا د ک . . . کوئی حل نہین
- طا = طب یا طا ے طب . . . . ″

جب ا بڑا بہ نسبت قائمہ کے ہے

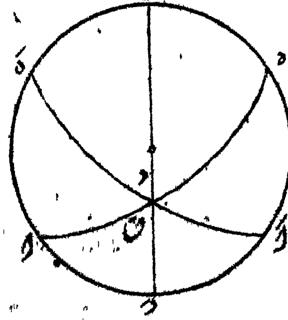
طب < ک/۲
- طا < طب یا طا = طب . . . کوئی حل نہین
- طا > طب اور طا + طب = ک یا < ک ایک حل
- طا > طب اور طا + طب > ک دو حل

طب = ک/۲
- طا < طب یا طا = طب . . . . کوئی حل نہین
- طا > طب . . . . دو حل

طب > ک/۲
- طا < طب اور طا + طب > ک . . . ایک حل
- طا < طب اور طا + طب = ک یا < ک . . . کوئی حل نہین
- طا = طب . . . . ایک حل
- طا > طب . . . . دو حل

یہان بہی وہی بات ہی جو اوپر لکہہ آئی ہین کہ جہان دو حل ہین وہان کوئی حل نہ ہوگا اگر جیب طا کم جیب طب جیب ا سی نہ ہوگی اوپر کی تحقیقات سی یہہ بات معلوم ہوتی ہی کہ اگر طا درمیان طب اور ک ـ طب کی واقع ہو تو ایک حل ہوگا اگر طا درمیان طب اور ک ـ طب کی نہین واقع ہوتا تو کیا تو کوئی حل نہ ہوگا یا دو ہونگی اور یہان دعوی مین وہ صورتین داخل نہین جنمین طا = طب یا = ک ـ طب

(۸۷) سب نتایج جو اوپر بیان ہوئی وہ اس شکل سی بیان ہوسکتی ہین



فرض کرو کہ ا د ا ی دا ئرہ عظیم ہی اور ق ا اور ق ا خطے اون تین سون کی سطح مستوی کے دائرہ دیرہ ہین جنمین سی ہر ایک برابر طب کی ہی اور زاویہ ا ب میان ا د ا ی کہتا ہین

اور فرض کرو کہ اس دائرہ سی نقطہ ق کی بعد عظیم و بعد صغیر کی طلی ق د اور ق ی ہین (دفعہ ۵۵ دیکھو)

پس اسطرح شکل مین یہہ فرض کیا گیا ہی کہ ا ا اور طب کم بہ نسبت ½ کے ہین اگر طا کم بہ نسبت اوس قوس کی ہو جو ق د سی تعبیر ہوئی ہی تو کوئی مثلث نہ ہوگا — اور اگر طا درمیان ق د اور ق ا کی بلحاظ مقدار کی ہو تو دو مثلث ہونگی — اسلئی کہ ا د ا پر ب واقع ہوگا اور ہم کو دو مثلث ب ق ا اور ب ق ا حاصل ہونگی — اگر طا درمیان ق ا اور ق ا کی واقع ہو تو ایک مثلث ہوگا اسلئی کہ ا ہ یا ا ی پر ب واقع ہوگا اور مثلث کیا تو ب ق ا کا جسمین ب درمیان ا اور ہ کی واقع ہی یا ا ق ب ہوگا جسمین ب درمیان ا اور ہ کی واقع ہی لیکن یہہ مثلث بموجب ۵۷ کی بالقرینہ مساوی ہین اگر طا برابر ق ہ سی ہو تو کوئی مثلث نہ ہوگا

اس ایک ہی شکل مین سب صورتین ثابت ہوسکتی ہین — اگر ا بڑا ½ سی ہو تو ہم ق ا ی اور ق ا ی کو برابر ا کی فرض کرسکتی ہین اگر طب بڑا بہ نسبت ½ کی ہی تو ق د اور ق ہ تعبیر طب کو کرینگا

(۸۸) دفعہ ۸۵ مین جو مثلثات تحیر قایم الزاویہ کی حل مین شبہات واقع ہوئی اونکی بحث اوسی طرح ہوسکتی جسطرح دفعہ ۸۶ کی شبہات پر ہوئی اور بوسیلہ قطبی مثلث کی اخر صورت دفعہ ۸۶ سے مستنبط ہوسکتی ہے

امثلہ

(۱) ایک مثلث کی ضلعی ۱۰۵° و ۹۰° و ۷۵° مین جیب سب زاویون کے دریافت کرو

(۲) ثابت کرو کہ مس ½ ا مس ½ ب = $\frac{\text{جب}(م - طس)}{\text{جب}\ م}$ ایک مثلث کو حل کرو جسمین ایک ضلع اور ایک متصل کا زاویہ اور مجموعہ باقی دو زاویون کا معلوم ہے

(۳) حل کرو ایک مثلث کو جسمین ایک ضلع اور متصل کا زاویہ اور مجموعہ باقی دو زاویون کا معلوم ہے

(۴) ایک مثلث مین مجموعہ دو ضلعون کا برابر نصف محیط کی ہی تو اوس قوس کو دریافت کرو

جو راس اور قاعدہ کی نقطہ وسط مین ملائی جاے

(۵) اگر طا اور طب اور طس معلوم ہون اور طس ربعہ محیط ہو تو زاوئی دریافت کرو اور یہہ ہی ثابت کروکہ اگر ہر عمود طس پر مقابل کی زاوئی سی نکالا جاے تو جم۲ ہر = جم۲ طا + جم۲ طب

(۶) اگر ایک مثلث کروی کا ایک ضلع چار برابر حصون مین تقسیم کیا جاے اور سر۱ و سر۲ و سر۳ و سر۴ زاوئی بالترتیب انکی سامنی مقابل کی زاویہ پر ہون تو ثابت کروکہ

جب (سر۱ + سر۲) جب سر۲ جب سر۴ = جب (سر۳ + سر۴) جب سر۱ جب سر۳

(۷) اگر کروی مثلث مین ا = ب = ۲س تو ثابت کروکہ

۸ جب (طا + طس/۲) جب۲ طس/۲ جم طس/۲ = جب۳ طا

(۸) اگر مثلث کروی مین ا = ب = ۲س ثابت کروکہ

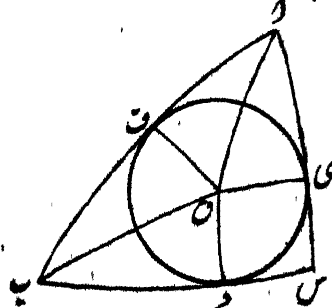
۸ جب۲ س/۲ (جم م + جب س/۲) جم طس / جم طا = ۱

(۹) اگر مثلث متساوی الساقین ا ب س کے ساق قوس د ہی سی تنصیف کیجائین اور ب س قاعدہ ہو تو ثابت کروکہ جب دہ/۲ = ۱/۲ جب ب س/۲ قط ا س/۲

(۱۰) اگر ا اور طا اور طب معلوم ہون اور طس۱ اور طس۲ قیمتین تیسری ضلع کی قیمتین ہون اور مثلث مشتبہ ہو تو ثابت کروکہ مس طس۱/۲ مس طس۲/۲ = مس ۱/۲ (طب − طا) مس ۱/۲ (طب + طا)

باب ہفتم مثلث کی اندر اور باہر جو دائری بنائی جائین

(۸۹) ایک مثلث مین جو چھوٹا دائرہ بنایا جای اوسکا نصف قطر قوسی دریافت کرو



فرض کرو کہ اب س مثلث کے زوایا ا اور ب کی قوسوں سے تنصیف کرو جو نقطہ ق پر ملیں اور نقطہ ق سے ق د اور ق ی اور ق ف عمود اضلاع پر نکالو — تو یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ق د اور ق ی اور ق ف سب آپس میں برابر ہیں اور نیز ا ی = ا ف اور ب ف = ب د اور س د = س ی اسی معلوم ہوا کہ ب س + ا ف = نصف مجموعہ اضلاع = م اسیواسطے ا ف = ص − طا

فرض کرو کہ ق ف = نق اب مس ق ف = مس ق ا ف جب ا ف بموجب دفعہ ۴۲ کے

پس مس نق = مس ½ ا جب (م − طا) . . . . (۱)

قیمت مس نق کی مختلف شکلوں میں بیان ہو سکتی ہے اسطرح سے کہ دفعہ ۵۴ کی موافق ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$مس \tfrac{1}{2} ا = \sqrt{\frac{جب (م - طب)\ جب (م - طس)}{جب م\ جب (م - طا)}}$$

اس قیمت کو مساوات (۱) میں رکھو تو

$$مس نق = \sqrt{\frac{جب (م - طا)\ جب (م - طب)\ جب (م - طس)}{جب م}} = \frac{ل}{جب م}$$ (دفعہ ۴۶) . . (۲)

پھر جب (م − طا) = جب [½ (طب + طس) − ½ طا]

= جب ½ (طب + طس) جم ½ طا − جم ½ (طب + طس) جب ½ طا

$$= \frac{جب \tfrac{1}{2} طا\ جم \tfrac{1}{2} طا}{جب \tfrac{1}{2} ا} \left\{ جم \tfrac{1}{2} (ب - س) - جم \tfrac{1}{2} (ب + س) \right\}$$ (دفعہ ۴۵)

$$= \frac{جب طا\ جب \tfrac{1}{2} ب\ جب \tfrac{1}{2} س}{جب \tfrac{1}{2} ا}$$

اسیواسطے (۱) سے

$$مس نق = \frac{جب \tfrac{1}{2} ب\ جب \tfrac{1}{2} س}{جم \tfrac{1}{2} ا} جب طا$$ . . . (۳)

اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۱۵ کے

$$مس نق = \frac{\sqrt{- جم م\ جم (م - ا)\ جم (م - ب)\ جم (م - س)}}{۲\ جم \tfrac{1}{2} ا\ جم \tfrac{1}{2} ب\ جم \tfrac{1}{2} س}$$

$$= \frac{ن}{۲\ جم \tfrac{1}{2} ا\ جم \tfrac{1}{2} ب\ جم \tfrac{1}{2} س}$$ . . . . (۴)

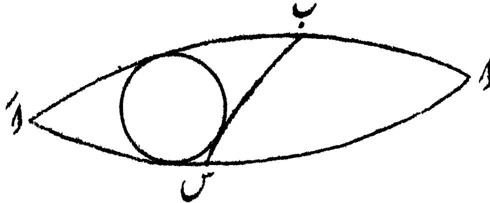
یہہ صور علم مثلثی معمولی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

۴ جم ½ ا جم ½ ب جم ½ س = جم م + جم (م − ا) + جم (م − ب) + جم (م − س)

اسی (۴) سے معلوم ہوتا ہے

مم لق = ۱/۲ن {جم م + جم (مَ - ا) + جم (مَ - ب) + جم (مَ - س)} . . . (۵)

(۹۰) اوس چھوٹی دائرہ کا نصف قطر توسی دریافت کرو جو مثلث معلوم کی ایک ضلع اور دو اضلاع خارجہ کو مس کرتا ہے



فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہی اور ہم کو منظور یہہ ہی کہ نصف قطر توسی اوس دائرہ خورد کا دریافت کریں جو ب س کو اور ا ب اور ا س خارج شدہ کو مس کرتا ہے

ا ب اور ا س کو خارج کر کی اَ پر ملاؤ پس اب یہہ مطلوب ہی کہ نصف قطر دائرہ خورد کا جو مثلث اَ ب س مین بنایا جاوے دریافت کرین اور اضلاع مثلث اَ ب س کی طا اور کہ - طب اور کہ - طس ہین

پس ہی ثابت ہوا کہ اگر نصف قطر کو لق سی تعبیر کرین اور ۱/۲ (طا + طب + طس) کو م سی تو بموجب دفعہ ۸۹ کے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

مس لق۱ = مس ۱/۲ جب م . . . . (۱)

اس سی ہم اور صور مساویہ دفعہ گذشتہ کی طرح نکال سکتی ہین اور ہم اون صورتون کا استعمال کرتی ہین جو مثلث اَ ب س کی زاویہ ا اور کہ - ب اور کہ - س سی پیدا ہوتی ہین

اسی معلوم ہوا کہ ۱/۲ (طا + طب + طس) تعبیر م سی اور ۱/۲ (ا + ب + س) تعبیر مَ سی ہوتا ہی تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

مس لق۱ = √{جب م جب (م - طب) جب (م - طس) / جب (م - طا)} = ن / جب (م - طا) . . . (۲)

مس لق۱ = جم ۱/۲ ب جم ۱/۲ س / جم ۱/۲ ا × جب طا . . . (۳)

مس لق۱ = √{- جم مَ جم (مَ - ا) جم (مَ - ب) جم (مَ - س)} / ۲ جم ۱/۲ ا جب ۱/۲ ب جب ۱/۲ س

= ن / ۲ جم ½ ا جب ½ ب جب ½ س . . . . (۴)

مم ق۱ = ۱/۲ن . { − جم م̄ − جم (م̄ − ا) + جم (م̄ − ب) + جم (م̄ − س) } . . . (۵)

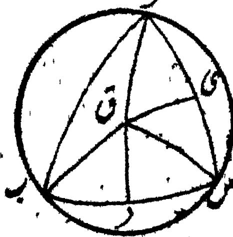
بغیر ان باتوں کی یہی نتیجی حاصل ہو سکتی ہیں اگر دو زاویٔ مثلث ا ب س کی تنصیف کریں اور اوسی قطب دائرہ خورد کا معین کریں اور دفعہ ۸۹ کی طرح عمل کریں

(۹۱) ایک دائرہ جو مثلث کی ایک ضلع کو اور اور دو ضلاع خارج شدہ کو مس کرتا ہی اوسے دائرہ خارجی کہتی ہیں پس مثلث معلوم کی تین دائری خارجی ہو سکتی ہیں

جو دائری اضلاع س ا اور س ب کو مس کرتی ہیں اونکی نصف قطروں کو ق۲ اور ق۳ سی تعبیر کرو تو قیمتیں ق۲ اور ق۳ کی زاویوں اور اضلاع کی حروف تبدیل کرنی سے اوسیطرح دریافت ہو جائینگی جسطرح ق معلوم ہوا تہا

دفعہ گذشتہ میں مثلث ا ب س اضلاع ا ب اور ا س کی خارج کرنی سی اور اونکو نقطہ ا پر ملانی سی پیدا ہوا تہا علی ہذالقیاس ایک مثلث اسطرح ب س اور ب ا کی خارج ہونی سی پیدا ہوتا ہی اور اسیطرح ایک اور مثلث س ا اور س ب کی خارج ہونی سی بنا ہی غرض اصل مثلث اور تین مثلث جو اسطرح پیدا ہوئی مثلثات متفقہ کہلاتی ہیں اور ا ب س کو اصلی مثلث کہتی ہیں — پس اسطرح مثلث معلوم کی اندرونی اور خارجی دائری وہی ہوئی جو مثلثات متفقہ کی (جنکا اصلی مثلث مثلث معلوم ہو) اندرونی اور خارجی دائری ہیں

(۹۲) ایک مثلث معلوم پر جو دائرہ اصغر بنایا جای اوسکا نصف قطر قوسی دریافت کرو



فرض کرو کہ ا ب س مثلث معلوم ہی اضلاع س ب اور س ا کی نقاط د اور ی پر تنصیف کرو

اور دا اوری سی قوسین عمود س ب اور س ا پر کہنچو اور فرض کرو کہ ق ان قوسون کا نقطہ تقاطع ہی تو ق قطب دائرہ اصغر کا ہوگا جو ا ب س کی اوپر بنایا جاوی ق ا اور ق ب اور ق س کہنچو تو مثلث قایم الزاویہ ق س دا اور ق ب د سی یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ ق ب = ق س اور مثلث قایم الزاویہ ق س ی اور ق ا ی سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ ق ا = ق س اسی ثابت ہوا کہ ق ا = ق ب = ق س اور نیز زاویہ ق ا ب = زاویہ ق ب ا اور زاویہ ق ب س = زاویہ ق س ب اور زاویہ ق س ا = زاویہ ق ا س

اسیواسطے ق س ب + ا = $\frac{1}{2}$ (ا + ب + س) اور ق س ب = م − ا

فرض کرو کہ ق س = نص

اب مس س د = مس س ق جم ق س د بموجب دفعہ ۶۲ کے

پس مس $\frac{1}{2}$ طا = مس نص جم (م − ا)

$$\text{اسیواسطے مس نص} = \frac{\text{مس } \tfrac{1}{2} \text{ طا}}{\text{جم (م − ا)}} \quad \ldots \quad (1)$$

قیمت مس نص کی بہت سی صورتون مین بیان ہوسکتی ہی اگر دفعہ ۴۹ کی موافق قیمت مس $\frac{1}{2}$ طا کے رکہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مس نص} = \frac{-\text{جم م}}{\text{جم (م − ا) جم (م − ب) جم (م − س)}} = -\frac{\text{جم م}}{\text{ن}} \quad \ldots \quad (2)$$

$$\text{اور جم (م − ا)} = \text{جم} \left(\tfrac{1}{2} (\text{ب + س}) - \tfrac{1}{2}\text{ا} \right)$$

$$= \text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{ب + س}) \text{ جم } \tfrac{1}{2}\text{ا} + \text{جب } \tfrac{1}{2}(\text{ب + س}) \text{ جب } \tfrac{1}{2}\text{ا}$$

$$= \frac{\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ا جم } \tfrac{1}{2}\text{ا}}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ طا}} \left\{ \text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{طب + طس}) + \text{جم } \tfrac{1}{2}(\text{طب − طس}) \right\} \quad \text{دفعہ ۵۴}$$

$$= \frac{\text{جب ا}}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{ طا}} \text{ جم } \tfrac{1}{2}\text{ طب جم } \tfrac{1}{2}\text{ طس}$$

اسیواسطے (۱) سے

$$\text{مس نص} = \frac{\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ طا}}{\text{جب ا جم } \tfrac{1}{2}\text{ طب جم } \tfrac{1}{2}\text{ طس}} \quad \ldots \quad (3)$$

اخر جملہ مین قیمت جب ا کی دفعہ ۴۶ کے موافق رکہو تو

مس لص = ۲ جب ½ طا جب ½ طب جب ½ طس / √(جب م جب (م − طا) جب (م − طب) جب (م − طس))

= ۲ جب ½ طا جب ½ طب جب ½ طس / ن . . . . (۴)

صور علم مثلثی مروجہ سی یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

۴ جب ½ طا جب ½ طب جب ½ طس = جب (م − طا) + جب (م − طب) + جب (م − طس) − جب م

اسسے ہم (۴) سے یہہ حاصل کرتے ہیں کہ

مس لص = ۱/۲ن [جب (م − طا) + جب (م − طب) + جب (م − طس) − جب م] . . . (۵)

(۹۳) نصف قطر قوسی دوائر اصغر کی جو گرد مثلثات متفقہ کی جنکا اصلی مثلث معلوم ہی دریافت کرو
فرض کرو کہ لص نصف قطر اوس دائرہ کا ہی جو اوس مثلث میں بنایئں کہ اب اور اس کی خارج ہونے اور نقطہ ا پر ملنی سی پیدا ہوتا ہی اور دو اور مثلث جو اسطرح بنائی جایئں اور اونکی اندر دائرے بنائی جایئں اونکی نصف قطروں کو لص۲ اور لص۳ سے تعبیر کرو

تو ہم جملی مس لص اور مس لص۲ اور مس لص۳ موافق دفعہ ۹۲ کی اوسیطرح معلوم کر سکتی ہیں جسطرح کہ مس لص دریافت کیا تھا اضلاع مثلث ا ب س کی طا و ک − طب اور ک − طس اور زاوئی اوسکی ا اور کہ − ب اور کہ − س ہیں اور م = ½ (طا + طب + طس) اور ح = ½ (ا + ب + س) تو اب ہم کو دفعہ ۹۲ کے موافق یہہ حاصل ہو گا

مس لص۱ = مس ½ طا / −جم ح . . . . (۱)

مس لص۱ = √(جم (ح − ا) / (−جم ح جم (ح − ب) جم (ح − س))) = جم (ح − ا) / ن . . . (۲)

مس لص۱ = جب ½ طا / جب ا جب ½ طب جب ½ طس . . . . . . (۳)

مس لص۱ = ۲ جب ½ طا جم ½ طب جم ½ طس / √(جب م جب (م − طا) جب (م − طب) جب (م − طس)) . . . (۴)

مس لص۱ = ۱/۲ن { جب م − جب (م − طا) + جب (م − طب) + جب (م − طس) } . . . (۵)

اور علی ہذا القیاس جملے لص ۲ اور لص ۳ کے واسطی دریافت کر سکتی ہیں

(۹۴) بہت سی مثالیں ایسی بن سکتی ہیں کہ جنمیں خواص مثلثات متفقہ کی دوائر اندرونی اور بیرونی کی مسائل ہوں مگر ہم اون میں سی ایک لکھتی ہیں وہ ایندہ کام آئینگی

ثابت کرو کہ

$$(\text{مم لق} + \text{مس لص})^2 = \frac{1}{4\,ن^2}(\text{جب طا} + \text{جب طب} + \text{جب طس})^2 - 1$$

ہم کو معلوم ہے کہ

$$4\,ن^2 = 1 - \text{جم}^2\text{طا} - \text{جم}^2\text{طب} - \text{جم}^2\text{طس} + 2\,\text{جم طا جم طب جم طس}$$

اسیواسطی

$$(\text{جب طا} + \text{جب طب} + \text{جب طس})^2 - 4\,ن^2$$

$$= 2\,(1 + \text{جب طا جب طب} + \text{جب طب جب طس} + \text{جب طس جب طا} - \text{جم طا جم طب جم طس})$$

اور نیز $\text{مم لق} + \text{مس لص} = \frac{1}{2\,ن}\left\{\text{جب م} + \text{جب (م} - \text{طا)} + \text{جب (م} - \text{طب)} + \text{جب (م} - \text{طس)}\right\}$

طرفین مساوات مجذور کرنی سی نتیجہ مطلوبہ حاصل ہو جایگا اسواسطی کہ اختصار کرنے سے

یہہ ثابت ہوگا کہ

$$\text{جب}^2\text{م} + \text{جب}^2(\text{م} - \text{طا}) + \text{جب}^2(\text{م} - \text{طب}) + \text{جب}^2(\text{م} - \text{طس}) = 2 - 2\,\text{جم طا جم طب جم طس}$$

$$\text{اور جب م جب (م} - \text{طا)} + \text{جب م جب (م} - \text{طب)} + \text{جب م جب (م} - \text{طس)}$$

$$+ \text{جب (م} - \text{طا) جب (م} - \text{طب)} + \text{جب (م} - \text{طب) جب (م} - \text{طس)} + \text{جب (م} - \text{طس) جب (م} - \text{طا)}$$

$$= \text{جب طا جب طب} + \text{جب طب جب طس} + \text{جب طس جب طا}$$

اسیطرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$(\text{مم لق}_1 - \text{مس لص})^2 = \frac{1}{4\,ن^2}(\text{جب طب} + \text{جب طس} - \text{جب طا})^2 - 1$$

(۹۵) دفعہ ۸۹ کی شکل میں فرض کرو کہ دق نقطہ ا تک ایسا خارج کیا جائی کہ د$_1$ ربعہ دائرہ ہو تو د$_1$ قطب ب س کا ہوگا اور ق د$_1$ = $\frac{\pi}{2}$ − لق اور اسیطرح فرض کرو کہ ی ق نقطہ تک

نقطہ ب تک ایسا خارج کیا ہی کہ ی ب ربعہ ہو اور ق نقطہ ق سے س تک ایسا خارج کیا جاے کہ ق س ربعہ ہو تو مثلث ا ب س قطبی مثلث ا ب س کا ہوگا

اور ق ا = ق ب = ق س = ۱/۲ - لق پس ق قطب اوس صغر دائرہ کا ہوا جو مثلث قطبی کے گرد کہنچا جاے اور نصف قطر قوسی دائرہ خورد کا جو مثلث قطبی کی گرد کہنچا جای تمامی اوس دائرہ خورد کی نصف قطر قوسی کی ہوتا ہی جو اس مثلث پر کہنچا جای ــــ اور اسیطرح سی ثابت ہوتا ہی کہ نقطہ قطب دائرہ خورد کا کہ مثلث قطبی مین بنایا جای ہو وہ قطب اوس دائرہ خورد کا ہوتا ہی جو اصلی مثلث کے گرد اوپر بنایا جای اور نصف قطر قوسی دونو دائرون کی باہم متمم ہین

امثلہ

جو رقمون کا طریقہ کتابت اس باب مین ہی وہی ان مثالون مین ہے
ثابت کرو کہ پہلی مثال سی پانچوین مثال تک ہر مثلث مین یہہ تعلقات ہونگے

(۱) مس لق۱ مس لق۲ مس لق۳ = مس لق جب۲ م

(۲) مس لص + مم لق = مس لص۱ + مم لق۱ = مس لص۲ + مم لق۲
= مس لق۳ + مم لق۳ = ۱/۲ (مم لق + مم لق۱ + مم لق۲ + مم لق۳)

(۳) مس۲ لص + مس۲ لص۱ + مس۲ لص۲ + مس۲ لص۳ = مم۲ لق + مم۲ لق۱ + مم۲ لق۲ + جم۲ لق۳

(۴) (مس لق۱ + مس لق۲ + مس لق۳ - مس لق) / (مم لق۱ + مم لق۲ + مم لق۳ - مم لق) = ۱/۲ (۱ + جم طا + جم طب + جم طس)

(۵) مس لص مس لص۱ مس لص۲ مس لص۳ = مس لص قط ح

(۶) مثلث متساوی الاضلاع مین ثابت کرو کہ مس لص = ۲ مس لق

(۷) اگر ا ب س ایک مثلث کروی ہو اور دائرہ جو اوسکی اوپر بنایا جاے اوسکا ق قطب ہو اور ک کوئی نقطہ کرہ پر ہو تو ثابت کرو کہ

جم ک ا + جم ک ب + جم ک س = ۳ جم ق ا جم ق ک

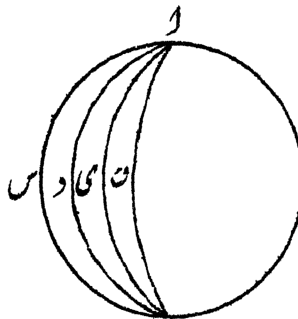
(۸) ایک مثلث کروی کا ہر ایک زاویہ ۱۲۰° ہی اور اوسکی اندرتین دائرہی دو دائرون کو اور مثلث کی دو ضلعون کو مس کرتی ہوئی کہنچ گئی ہین تو ثابت کرو کہ نصف قطر ہر دائرہ خورد کا = ۳۰° اور مرکز تینون دوائر خورد کی منطبق مثلث قطبی کی زاویون کی نقاط پر ہونگے

باب ہشتم

مثلث کروی کا رقبہ اور ازدیاد کروی

(۹۶) رقبہ شکل ہلالی کا دریافت کرو

شکل ہلالی یا ہلال کرہ کی سطح مستدیر کی اوس حصہ کو کہتی ہین جو دو نصف دوائر عظیم کے درمیان واقع ہو

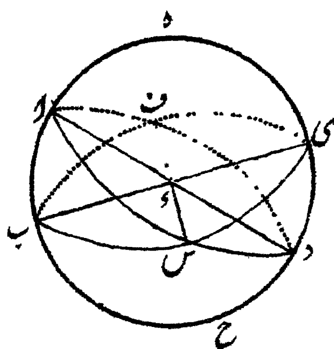


فرض کرو کہ ا س ب د ا اور ا د ب ی ا دو ہلال ہین جنکی زاوئی ا پر برابر ہین پہلی جب ایک ہلال کو دوسرے ہلال پر منطبق کرین تو وہ بالکل منطبق ہو جائینگے پس اسی ثابت ہوا کہ ہلال جنکی زاوئی آپسمین برابر ہوتی ہین پس اگر وہی عمل کرین جو اقلیدس کے چہٹی مقالہ مین کیا گیا ہی تو ثابت ہوگا کہ ہلال متناسب اپنی زاویون کی ہوتی ہین پس اسی معلوم ہوا کہ تمام سطح مستدیر کرہ کو ایک ہلال خیال کر سکتی ہین جسکا زاویہ برابر چار قائمون کی ہی پس جب ہلال کا زاویہ ایسا ہو کہ اوسکا مقیاس قوسی ا ہی تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{رقبہ ہلال}}{\text{سطح مستدیر کرہ}} = \frac{ا}{۲ط}$$

فرض کرو کہ لو نصف قطر کرہ کا ہی تو بموجب (باب ہفتم کلیات) کی رقبہ سطح مستدیر کرہ کا ۴ ک لو² ہوگا پس رقبہ ہلال کا = $\frac{ا}{۲ط}$. ۴ ک لو² = ۲ ا لو²

(۹۷) رقبہ مثلث کروی کا دریافت کرو



فرض کرو کہ ا ب س مثلث کروی ہی قوسون کو جو مثلث کی ضلعی بنائی ہین خارج کرو کہ دوبارہ اونمین سی دو دو اسمین ملین جیسا ونمین سی ہریک نصف محیط بن جائیگی تو یہہ ہلال ضرور واقع ہونگا یعنی ہلال ا ب د س ا اور ب س ی ا ب اور س ا ف ب س کا ایک حصہ مثلث ا ب س ہے اب مثلث س د ی اور ا ف ب زوایا مجسمہ مقابلہ کی محاذی واقع ہین اسلئی ہم اونکے رقبی اسمین برابر خیال کرسکتی ہین اسیواسطی ہلال س ا ف ب س برابر مجموعہ مثلثات ا ب س اور س د ی کی ہی اسی ثابت ہوا کہ اگر ا و ب و س مثلث کی زاویون کی مقیاس قوسی کو تعبیر کرین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

مثلث ا ب س + ب ح د س = ہلال ا ب د س ا = ۲ ا لق ۲

مثلث ا ب س + ا ہ ی س = ہلال ب س ی ا ب = ۲ ب لق ۲

مثلث ا ب س + مثلث س د ی = ہلال س ا ف ب س = ۲ س لق ۲

پس جمع کرنے سے

دوچند مثلث ا ب س + سطح مستدیر نصف کرہ = ۲ (ا + ب + س) لق ۲

اسیواسطی مثلث ا ب س = (ا + ب + س − ک) لق ۲

اس جملہ ا + ب + س - ک کو زیادتی یا ازدیاد مثلثی کہتے ہین اور چونکہ

(ا + ب + س - ک) نق٢ = (ا + ب + س - ک)/٢ک × ٢ک نق٢

پس یہہ نتیجہ یون بیان ہوتا ہی کہ رقبہ مثلث کروی کا نصف کرہ کی سطح مستدیر کا ایسا ہی حصہ ہوتا ہی جیسا کہ ازدیاد کروی حصہ چار قائمون کا ہوتا ہے

(٩٨) ہم نی اوپر کی دفعہ مین معمول کی موافق یہہ فرض کر لیا ہی کہ مثلث س دی اور ا ف یے ایسمین برابر ہین لیکن اوسمین مساوات انطباق نہین ہی یعنی وہ مساوات نہین ہی کہ تطبیق سی وہ ایک دوسرے پر منطبق ہو جائین لیکن اونمین مساوات بالقرینہ ہی یعنی مثلثون کی ایسی ٹکڑی ہو سکتی ہین کہ اگر اونکو باہم چسپان کری تو وہ بالکل منطبق ہو جائین اب ایسی ٹکڑی اسطرح ہو سکتی ہین کہ ہر مثلث کی گرد دائرہ بنائین تو نصف قطر قوسی ان دائرون کے بموجب دفعہ ٨٩ کی برابر ثابت ہو سکتی ہی اگر قطب دائرہ بیرونی کا ہر مثلث کی اندر واقع ہوتا ہے تو ہر مثلث مجموعہ تین مثلث متساوی الساقین کا ہوگا

اور اگر قطب مثلث سی باہر واقع ہوتا ہی تو ہر مثلث تفاوت ایک مثلث متساوی الساقین اور مجموعہ دو متساوی الساقین مثلثون کا ہوگا اور یہہ مثلث متساوی الساقین ایک مجموعہ کے موافق اپنی اپنی نظیر کے برابر دوسرے مجموعہ کی متساوی الساقین مثلثون کی ہونگے

(٩٩) کثیر الاضلاع کروی کا رقبہ دریافت کرو

فرض کرو کہ ن تعداد اضلاع کثیر الاضلاع کی ہی اور ص مجموعہ تمام زاویون کا ہی کثیر الاضلاع کی اندر کوئی نقطہ مقرر کر کی سب زاویون کی نقطون مین خط ملاؤ تو اسطرح کثیر الاضلاع ن مثلثون مین تقسیم ہوگی پس اسی معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ٩٧ کی رقبہ کثیر الاضلاع = (مجموعہ مثلثون کے زاویون کے + ن ک) نق٢ اور مجموعہ مثلثون کی تمام زاویون کا ص مع چار قائمون کی ہی یہہ چار قائمی راس مشترک پر سب زاویی راس کی پیدا کرتی ہین

اسیواسطی رقبہ کثیر الاضلاع = {ص - (ن - ٢) ک} نق٢

یہہ جملہ اون کثیر الاضلاعوں کی واسطی بہی درست ہی اگر اوسکی بعض زاویوں مین سی ہر ایک دو قائموں سی بڑا ہو بشرطیکہ وہ مثلثوں مین اسطرح تحلیل ہو سکتی ہون کہ ہر ایک زاویہ مثلث کا دو قائموں سی کم ہو

(۱۰۰) اب مثلث کی ازدیاد کروی کی بعض خاص علم مثلثی جملی بیان کرتی ہین اور مثلث کی ازدیاد کروی کو ز سی تعبیر کرتی ہین اسطرح کہ ز = ا + ب + س − ک

(۱۰۱) لیگ ژول صاحب کا ضابطہ ۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ز}=\frac{\sqrt{\text{جب م جب(م − طا) جب(م − طب) جب(م − طس)}}}{2\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طا جم}\tfrac{1}{2}\text{طب جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}$$

$$\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{ز}=\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب + س − ک})=\text{جب}\left\{\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب})-\tfrac{1}{2}(\text{ک − س})\right\}$$

$$=\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س}-\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب})\,\text{جم س}$$

$$=\frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س جم}\tfrac{1}{2}\text{س}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}\left\{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{طا − طب})-\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{طا + طب})\right\}$$ بموجب دفعہ ۵۴ کے

$$=\frac{\text{جب س جب}\tfrac{1}{2}\text{طا جب}\tfrac{1}{2}\text{طب}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}$$

$$=\frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{طا جب}\tfrac{1}{2}\text{طب}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}\cdot\frac{2}{\text{م جب طا جب طب}}\sqrt{\left[\text{جب م جب(م − طا) جب(م − طب) جب(م − طس)}\right]}$$

$$=\frac{\sqrt{\text{جب م جب(م − طا) جب(م − طب) جب(م − طس)}}}{2\,\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طا جم}\tfrac{1}{2}\text{طب جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}$$

(۱۰۲) ہیولیئر کا ضابطہ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}\tfrac{1}{4}\text{ز}=\sqrt{\left[\text{مس}\tfrac{1}{2}\text{م مس}\tfrac{1}{2}(\text{م − طا})\,\text{مس}\tfrac{1}{2}(\text{م − طب})\,\text{مس}\tfrac{1}{2}(\text{م − طس})\right]}$$

$$\text{مس}\tfrac{1}{4}\text{ز}=\frac{\text{جب}\tfrac{1}{4}(\text{ا + ب + س − ک})}{\text{جم}\tfrac{1}{4}(\text{ا + ب + س − ک})}$$

$$=\frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب})-\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ک − س})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب})-\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ک − س})}$$ علم مثلث مستقیم الاضلاع دفعہ ۸۳

$$=\frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب})-\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{س}}{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{ا + ب})+\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س}}$$

$$=\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{طا − طب})-\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}{\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{طا + طب})+\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}\cdot\frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{س}}{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{س}}$$ دفعہ ۵۴

پس معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۴۵ کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

مس ¼ ز = جب ¼ (طس + طا - طب) جب ¼ (طس + طب - طا) / جم ¼ (طا + طب + طس) جم ¼ (طا + طب - طس) √ = جب م جب (م - طس) / جب (م - طا) جب (م - طب)

= √ مس ½ م مس ½ (م - طا) مس ½ (م - طب) مس ½ (م - طس)

(۱۰۳) مثلث کی ازدیاد کروی کی لئی اور بہت سی صور قانونیہ جنمین مثلثی جملے متعلق ہون دریافت ہو سکتی ہیں مثلاً

جم ½ ز = جم { ½ (ا + ب) - ½ (ک - س) }

= جم ½ (ا + ب) جب ½ س + جب ½ (ا + ب) جم ½ س

= { جم ½ (طا + طب) جب٢ ½ س + جم ½ (طا - طب) جم٢ ½ س } قط ½ طس (دفعہ ۵۴ کے)

= { جم ½ طا جم ½ طب (جم٢ ½ س + جب٢ ½ س)

+ جب ½ طا جب ½ طب (جم٢ ½ س - جب٢ ½ س) } قط ½ طس

= { جم ½ طا جم ½ طب + جب ½ طا جب ½ طب جم س } قط طس . . . (۱)

دفعہ ۱۰۱ مین ثابت ہوا تہا کہ

جب ½ ز = جب س جب ½ طا جب ½ طب قط ½ طس

اسیواسطی مس ½ ز = جب ½ طا جب ½ طب جب س / جم ½ طا جم ½ طب + جب ½ طا جب ½ طب جم س . . . (۲)

اور پہر ہم کو اوپر سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

جم ½ ز = (جم ½ طا جم ½ طب + جب ½ طا جب ½ طب جم س) قط ½ طس

= (۱ + جم طا) (۱ + جم طب) + جب طا جب طب جم س / ۴ جم ½ طا جم ½ طب جم ½ طس

= ۱ + جم طا + جم طب + جم طس / ۴ جم ½ طا جم ½ طب جم ½ طس = جم٢ ½ طا + جم٢ ½ طب + جم٢ ½ طس - ۱ / ۲ جم ½ طا جم ½ طب جم ½ طس . . . (۳)

(۳) مین ۱ - ۲ جب٢ ¼ ز بجای جم ½ ز کے لکھو تو

جب٢ ¼ ز = ۱ + ۲ جم ½ طا جم ½ طب جم ½ طس - جم٢ ½ طا - جم٢ ½ طب - جم٢ ½ طس / ۴ جم ½ طا جم ½ طب جم ½ طس

ہم عمولی طور پر ثابت کر سکتی ہین کہ شمار کنندہ اس کسر کا برابر ہے

$$\text{۴ جب } \tfrac{1}{2}\text{م جب } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طا})\text{ جب } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طب})\text{ جب } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طس})$$

اسیواسطے

$$\text{جب}^{2}\tfrac{1}{4}\text{ز} = \frac{\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{م جب } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طا})\text{ جب } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طب})\text{ جب } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طس})}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{طا جم } \tfrac{1}{2}\text{طب جم } \tfrac{1}{2}\text{طس}} \quad \ldots (۴)$$

اور علی ہذا القیاس

$$\text{جم}^{2}\tfrac{1}{4}\text{ز} = \frac{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{م جب } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طا})\text{ جم } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طب})\text{ جم } \tfrac{1}{2}(\text{م} - \text{طس})}{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{طا جم } \tfrac{1}{2}\text{طب جم } \tfrac{1}{2}\text{طس}} \quad \ldots (۵)$$

اب تقسیم کرنے سی ہم کو ضابطہ ہیولیر کا حاصل ہوگا

$$\text{پھر } \frac{\text{جب}(\text{س} - \tfrac{1}{2}\text{ز})}{\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ز}} = \text{جب س مم } \tfrac{1}{2}\text{ز} - \text{جم س}$$

$$= \text{جب س} \frac{\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{طا جم } \tfrac{1}{2}\text{طب} + \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب جم س}}{\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب جب } \tfrac{1}{2}\text{طس}} - \text{جم س جموب } (۲)$$

$$= \text{مم } \tfrac{1}{2}\text{طا مم } \tfrac{1}{2}\text{طب}$$

اسیواسطے بموجب دفعہ ۱۰ اکے

$$\text{جب}(\text{س} - \tfrac{1}{2}\text{ز}) = \sqrt{\left\{\frac{\text{جب م جب}(\text{م} - \text{طا})\text{ جب}(\text{م} - \text{طب})\text{ جب}(\text{م} - \text{طس})}{\text{۲ جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب جب } \tfrac{1}{2}\text{طس}}\right\}}$$

$$\text{پھر جم}(\text{س} - \tfrac{1}{2}\text{ز}) = \text{جم س جم } \tfrac{1}{2}\text{ز} + \text{جب س جب } \tfrac{1}{2}\text{ز}$$

$$= \frac{(۱ + \text{جم طا})(۱ + \text{جم طب})\text{ جم س} + \text{جب طا جب طب جم}^{2}\text{س}}{\text{۴ جم } \tfrac{1}{2}\text{طا جم } \tfrac{1}{2}\text{طب جم } \tfrac{1}{2}\text{طس}} + \text{جب}^{2}\text{س جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب قط } \tfrac{1}{2}\text{طس}$$

$$= \frac{(۱ + \text{جم طا})(۱ + \text{جم طب})\text{ جم س} + \text{جب طا جب طس}}{\text{۴ جم } \tfrac{1}{2}\text{طا جم } \tfrac{1}{2}\text{طب جم } \tfrac{1}{2}\text{طس}} = (\text{جم } \tfrac{1}{2}\text{طا جم } \tfrac{1}{2}\text{طب جم س} + \text{جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب})\text{ قط } \tfrac{1}{2}\text{طس}$$

$$= \frac{\text{جب طا جب طب جم س} + \text{۴ جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طا جب}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طب}}{\text{۴ جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب جب } \tfrac{1}{2}\text{طس}}$$

$$= \frac{\text{جم طس} - \text{جم طا جم طب} + (۱ - \text{جم طا})(۱ - \text{جم طب})}{\text{۴ جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب جب } \tfrac{1}{2}\text{طس}}$$

$$= \frac{۱ + \text{جم طس} - \text{جم طا} - \text{جم طب}}{\text{۴ جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب جب } \tfrac{1}{2}\text{طس}} = \frac{\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طس} - \text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طا} - \text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طب} + ۱}{\text{۲ جب } \tfrac{1}{2}\text{طا جب } \tfrac{1}{2}\text{طب جم } \tfrac{1}{2}\text{طس}} \quad \ldots (۶)$$

اس نتیجہ سی ہم دو اور نتیجے اسیطرح مستنبط کر سکتی ہیں جسطرح (۴) (۵) کو (۳) سی مستنبط کیا تھا جانب راست (۶) کی اسطرح بھی حاصل ہو سکتی ہی کہ (۳) کی جانب راست میں طا اور طب کی جگہ ک − طا اور ک − طب رکھیں اس طرح نتائج نہایت آسانی سی حاصل ہو جائینگے

ہم کو یہہ حاصل ہے

$$\text{جب}^{2}\left(\tfrac{1}{2}\text{س} - \tfrac{1}{2}\text{ز}\right) = \frac{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{م جب}\tfrac{1}{2}(\text{م}-\text{طا})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{م}-\text{طب})\,\text{جب}\tfrac{1}{2}(\text{م}-\text{طس})}{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{طا جب}\tfrac{1}{2}\text{طب جب}\tfrac{1}{2}\text{طس}}$$

$$\text{جم}^{2}\left(\tfrac{1}{2}\text{س} - \tfrac{1}{2}\text{ز}\right) = \frac{\text{جب}\tfrac{1}{2}\text{م جم}\tfrac{1}{2}(\text{م}-\text{طا})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{م}-\text{طب})\,\text{جم}\tfrac{1}{2}(\text{م}-\text{طس})}{\text{جم}\tfrac{1}{2}\text{طا جم}\tfrac{1}{2}\text{طب جم}\tfrac{1}{2}\text{طس}}$$

مثالین

(۱) اضلاع اور زاوئی اوس مثلث متساوی الاضلاع کی دریافت کرو جسکا رقبہ ایک چوتہائی سطح مستدیر اوس کرہ سے ہو جسپر وہ بنایا گیا ہے

(۲) ایک کثیر الاضلاع کروی مساوی الاضلاع اور مساوی الزوایا ن اضلاع کی ہی تو بتاؤ ہر ایک زاویہ کی کیا مقدار ہوگی اگر رقبہ اوسکا نصف سطح مستدیر اوس کرہ سی ہو جسپر وہ بنائی گئی ہے

(۳) اگر طا = طب = $\frac{\pi}{3}$ اور طس = $\frac{\pi}{2}$ تو ثابت کرو کہ ز = جم$^{-1}$ $\frac{7}{9}$

(۴) اگر مثلث کروی کا زاویہ س قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ

جب $\frac{1}{2}$ز = جب $\frac{1}{2}$طا جب $\frac{1}{2}$طب قط $\frac{1}{2}$طس اور جم $\frac{1}{2}$ز = جم $\frac{1}{2}$طا جم $\frac{1}{2}$طب قط $\frac{1}{2}$طس

(۵) اگر زاویہ س قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب}^{2}\text{طس}}{\text{جب طس}} \quad \text{جم ز} = \frac{\text{جب}^{2}\text{طا}}{\text{جم طا}} + \frac{\text{جب}^{2}\text{طب}}{\text{جم طب}}$$

(۶) اگر طا = طب اور س = $\frac{\pi}{2}$ ثابت کرو کہ مس ز = $\frac{\text{جب}^{2}\text{طا}}{2\,\text{جم طا}}$

(۷) مثلث قایم الزاویہ کی زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سی کم ہوتا ہے

(۸) مثلث کروی کی ایک ضلع مین نقطہ معلوم سی ایک قوس ایسی کہنچو کہ مثلث مین سی ایک حصہ معلوم قطع کرو

(۹) اگر مثلث کروی کی زاوئی ملکر برابر چار قائموں کے ہوں تو

$$\text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طا} + \text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طب} + \text{جم}^{2}\tfrac{1}{2}\text{طس} = 1$$

(۱۰) اگر لق ۱ و لق ۲ و لق ۳ نصف قطر تین دوائر صغیرہ ایک کرہ کی ہوں جسکا نصف قطر ق ہو اور وہ ایسمین ایک دوسرے کو نقاط ق و ک و ر پر مس کرتے ہوں اور زاویہ و س اوس مثلث کروی کے زاوئی ہوں جو اونکی مرکزوں مین خطوط وصل کرنی سی پیدا ہوتا ہے تو

رقبہ ق ک ر = (ا جم لق$_1$ + ب جم لق$_2$ + س جم لق$_3$ − ک) لق^2

(۱۱) ثابت کرو کہ

جب م = (جب ½ ر جب (ا − ½ ر) جب (ب − ½ ر) جب (س − ½ ر))$^{\frac{1}{2}}$ / ۲ جب ½ ا جب ½ ب جب ½ س

(۱۲) ایک مثلث کروی کی دو ضلعی معلوم ہین تو دریافت کرو کہ رقبہ اوسکا کب زیادہ سی زیادہ ہوگا

(۱۳) ایک کرہ کی سطح پر دوائر عظیمہ کی قوسون سی ایک کثیر الاضلاع جسکی ضلعون کی تعداد معلوم ہی کھنچی ہی اوسکا رقبہ دریافت کرو اور پہر اوسی یہہ استنباط کرو کہ اگر طا نصف قطر قوسی دائرہ صغیرہ کا ہو تو اوسکی رقبہ کو کل رقبہ کرہ سی وہ نسبت ہوگی جو جع طا کو ۲ سے

(۱۴) اگر ایک مثلث کروی کی نقاط زاویہ ا و ب و س ہون اور اونکی مقابل کی اضلاع کی نقاط وسط اَ و بَ و سَ ہون اور ز کروی زیادتی مثلث کی ہو تو ثابت کرو کہ

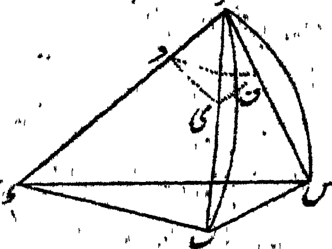
جم ½ ز = جم اَ بَ / جم ½ طس = جم بَ سَ / جم ½ طا = جم سَ اَ / جم ½ طب

(۱۵) اگر اون دوائر عظیمہ کے قوسون مین سی جو اضلاع مثلث کی نقاط وسط ملائی جائین ایک ربعہ ہو تو ثابت کرو کہ باقی دو ضلعی بہی ربعات ہونگے

باب نہم تقریبی اور تخمینی صور قانونیہ

(۱۰۴) جب نصف قطر کرہ کا بہت بڑا اضلاع مثلث کروی سی ہوتا ہی تو اوسوقت مثلثون کے حساب کتاب مین بعض خاص صور تقریبیہ تخمینیہ بہت کام مین اتی ہین اسلئے ہم بعض کی تحقیقات اونمین سے اس باب مین کرینگے

(۱۰۵) ایک مثلث کروی کی دو ضلعی اور اونکی درمیانی زاویہ معلوم ہے تو ان اضلاع کے وترون کی درمیان کا زاویہ دریافت کرو



فرض کرو کہ اب اور اس وفع اضلاع معلوم مثلث اب س کی ہین اور ء مرکز کرہ کا ہی مرکز ا کی گرد ایک کرہ بناؤ اور فرض کرو کہ وہ ا ء و اب و اس سی نقاط د اور ی اور ف پر ملی تو زاویہ دی ف میلان سطوح ء اب اور ء اس کا ہوگا اور اسیواسطی برابر ہوگا زاویہ ا کے ۔ مثلث کروی دی ف مین

جم ی ف = جم دی جم د ف + جب دی جب د ف جم ا

اور دی = $\frac{1}{2}$ (ک ـ طس) اور د ف = $\frac{1}{2}$ (ک ـ طب)

اسیواسطے جم ی ف = جب $\frac{1}{2}$ طب جم $\frac{1}{2}$ طس + جم $\frac{1}{2}$ طب جم $\frac{1}{2}$ طس جم ا

اگر اضلاع مثلث کی بہ نسبت نصف قطر کرہ کی نہایت چھوٹی ہون تو ی ف اور اس مین بہت تفاوت نہ ہوگا فرض کرو کہ ی ف = ا ـ بر تقریباً تو

جم ی ف = جم ا + بر جب ا

اور جب $\frac{1}{2}$ طب جب $\frac{1}{2}$ طس = جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب + طس) ـ جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب ـ طس)

جم $\frac{1}{2}$ طب جم $\frac{1}{2}$ طس = جم^2 $\frac{1}{4}$ (طب + طس) ـ جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب ـ طس)

اسیواسطے جم ا + بر جب ا = جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب + طس) ـ جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب ـ طس) + (۱ ـ جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب + طس) ـ جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب ـ طس)) جم ا

بر جب ا = (۱ ـ جم ا) جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب + طس) ـ (۱ + جم ا) جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب ـ طس)

اسیواسطے بر = مس $\frac{1}{2}$ ا جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب + طس) ـ مم $\frac{1}{2}$ ا جب^2 $\frac{1}{4}$ (طب ـ طس)

اسی مقیاس قوسی بر کا دریافت ہوتا ہی ۔ تعداد ثانیون کی زاویہ مین اسطرح دریافت ہوتی ہے کہ اوسکی مقیاس قوسی کو ایک ثانیہ کی مقیاس قوسی پر تقسیم کردیا ایک ثانیہ کی جیب تقریبی پر تقسیم کرو علم مثلث مستوی دفعہ ۱۲۳ دیکھو

اگر طول قوسون کی موافق طا اور طب کے صہ او صہ ہو اور لق نصف قطر کرہ کا ہو تو صہ/لق اور صہ/لق مقیاس قوسی طا اور طب کے ہونگے اور وتر مثلثی کی اضلاع کا طول ۲ لق جب صہ/۲لق و ۲ لق جب صہ/۲لق ہوگا پس اسطرح جب مثلث کی دو ضلعی اور نصف قطر کرہ کا معلوم ہو تو مثلث وتری کی اضلاع اور زاویون کا حساب کرسکتی ہین

(۱۰۶) لیجنڈر کا ضابطہ

اگر اضلاع مثلث کروی کی نصف قطر کرہ سی نہایت چہوٹی ہوں اور ایک مثلث مستقیم الاضلاع ہو جسکی ضلعی طول میں برابر مثلث کروی کی قوسوں کی ہوں تو ہر یک زاویہ مثلث کروی کا مثلث مستوی کی ہر یک زاویہ سی موافق اپنی نظیر کی بقدر ثلث ازدیاد کروی کی زیادہ ہوتا ہی

فرض کرو کہ مثلث کروی کی زاویئی ا و ب و س ہیں اور طا و طب اور طس اضلاع لق نصف قطر کرہ کا اور سہ و صہ و لہ طول قوسوں کا ہو جنسی کہ ضلعی مثلث کی بنتی ہیں

پس $\frac{\text{سہ}}{\text{لق}}$ و $\frac{\text{صہ}}{\text{لق}}$ و $\frac{\text{لہ}}{\text{لق}}$ مقیاس قوسی طا و طب و طس کے ہونگے تو

$$\text{جم ا} = \frac{\text{جم طا} - \text{جم طب جم طس}}{\text{جب طب جب طس}}$$

$$\text{اب جم ا} = 1 - \frac{\text{سہ}^2}{2\,\text{لق}^2} + \frac{\text{سہ}^4}{24\,\text{لق}^4} - \dots$$

$$\text{جب طا} = \frac{\text{سہ}}{\text{لق}} - \frac{\text{سہ}^3}{6\,\text{لق}^3} + \dots$$

اسی قبل کی جملی جم طب اور جب طب اور جم طس اور جب طس کی لئی ہونگے

پس اب ہم اگر چوتہی قوت سی زیادہ قوت کو کام میں نہ لائیں تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{جم ا} = \frac{1 - \frac{\text{سہ}^2}{2\,\text{لق}^2} + \frac{\text{سہ}^4}{24\,\text{لق}^4} - \left(1 - \frac{\text{صہ}^2}{2\,\text{لق}^2} + \frac{\text{صہ}^4}{24\,\text{لق}^4}\right)\left(1 - \frac{\text{لہ}^2}{2\,\text{لق}^2} + \frac{\text{لہ}^4}{24\,\text{لق}^4}\right)}{\frac{\text{صہ لہ}}{\text{لق}^2}\left(1 - \frac{\text{صہ}^2}{6\,\text{لق}^2}\right)\left(1 - \frac{\text{لہ}^2}{6\,\text{لق}^2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\,\text{لق}^2}\left(\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2\right) + \frac{1}{24\,\text{لق}^4}\left(\text{سہ}^4 - \text{صہ}^4 - \text{لہ}^4 - 6\,\text{صہ}^2\text{لہ}^2\right)}{\frac{\text{صہ لہ}}{\text{لق}^2}\left(1 - \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2}{6\,\text{لق}^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\text{صہ لہ}}\left\{\frac{1}{2}\left(\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2\right) + \frac{1}{24\,\text{لق}^2}\left(\text{سہ}^4 - \text{صہ}^4 - \text{لہ}^4 - 6\,\text{صہ}^2\text{لہ}^2\right)\right\} \times \left\{1 + \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2}{6\,\text{لق}^2}\right\}$$

$$= \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2}{2\,\text{صہ لہ}} + \frac{\text{سہ}^4 + \text{صہ}^4 + \text{لہ}^4 - 2\,\text{سہ}^2\text{صہ}^2 - 2\,\text{صہ}^2\text{لہ}^2 - 2\,\text{لہ}^2\text{سہ}^2}{24\,\text{صہ لہ لق}^2}$$

اب فرض کرو کہ اَ و بَ اور سَ مثلث مستقیم الاضلاع کی زاویئی ہوں جسکی ضلعی سہ و صہ و لہ ہیں

$$\text{تو جم اَ} = \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2}{2\,\text{صہ لہ}}$$

$$\text{پس جم ا} = \text{جم اَ} - \frac{\text{صہ لہ جب}^2\,\text{اَ}}{6\,\text{لق}^2}$$

فرض کرو کہ ا = اَ + بر

جم ا = جم اَ − بر جم اَ تقریباً

اسیواسطے بر = صہ لر حد اَ / ۴ لو۲ = ح / ۳ لو۲

یہان ح رقبہ اوس مثلث مستقیمۃ الاضلاع کا ہی جسکی اضلاع کہ صہ و سہ و لر ہین

اور اسیطرح ب = بَ + ح/۳لو۲ اور س = سَ + ح/۳لو۲

اسی معلوم ہوا کہ تقریباً ا + ب + س = اَ + بَ + سَ + ح/لو۲ = کہ + ح/لو۲

اسیواسطے ح/لو۲ تقریباً و تخمیناً برابر زیادہ کروی کی ہوئی اور ضابطہ ثابت ہوگیا

یہہ بہی معلوم رہی کہ رقبی مثلث کروی اور مثلث مستقیمۃ الاضلاع کی جسکی اضلاع طول مین برابر اضلاع مثلث کروی کی طول کی ہی برابر مانی گئی ہین

(۱۰۷) لیجنڈر کا ضابطہ مثلث کروی کی حل کرنی مین بہ تفصیل ذیل کام مین آتا ہے

(۱) اول فرض کرو کہ مثلث کروی کی اضلاع معلوم ہین تو قیمتین سہ و صہ و لر کی معلوم ہین اور علم مثلث مستقیمۃ الاضلاع کی صورسی ہم ح اور اَ و بَ اور سَ کا حساب لگا سکتی ہین تو ا و ب و س ان صور سے معلوم ہوجائینگے

ا = اَ + ح/۳لو۲ اور ب = بَ + ح/۳لو۲ اور س = سَ + ح/۳لو۲

(۲) فرض کرو کہ دو ضلعی اور اونکا زاویہ درمیانی مثلث کروی مین معلوم ہین مثلاً ا د طب و طس

ح = ½ صہ لر جب اَ = ½ صہ لر جب ا تخمیناً

تو اَ اس صورت سی معلوم ہوگا کہ اَ = ا − ح/۳لو۲ پس اسطرح مثلث مستقیمۃ الاضلاع مین دو ضلعی اور اونکا زاویہ درمیانی معلوم ہوگا اور پہر اوسی اور ضلعی اور زاوئی مثلث مستقیمۃ الاضلاع کے معلوم ہونگے اور پہر اوسی مثلث کروی کی ضلع اور زاوئی معلوم ہوجائینگے

(۳) فرض کرو کہ مثلث کروی کی دو ضلعی اور ایک زاویہ اون مین سی کسی ایک ضلع کی مقابل کا معلوم ہی مثلاً ا اور طا اور طب

جب بَ = ـــ جب اَ = ـــ جب ا تخمیناً

اور سَ = ک – اَ – بَ = ک – ا – ب تخمیناً تو ح = $\frac{1}{2}$ سہ صہ جب سَ اسی اسعلوم ہوگا

اور مثلث مستقیم الاضلاع حل ہوجائیگا اسلئے کہ اونمیں سے دو ضلعے اور اونمیں سے ایک ضلع کا مقابل زاویہ معلوم ہے

(۴) فرض کرو کہ مثلث کروی کی دو زاوئے اور اونکی درمیان کا ضلع معلوم ہے مثلاً ا و ب و س

تو ح = $\frac{\text{لہ}^2 \text{ جب اَ جب بَ}}{\text{۲ جب (اَ + بَ)}} = \frac{\text{لہ}^2 \text{ جب ا جب ب}}{\text{۲ جب (ا + ب)}}$ تقریباً

پس اسی مثلث مستقیم الاضلاع کے دو زاوئے اور اونکی درمیان کا ضلع معلوم ہوگیا

(۵) فرض کرو کہ مثلث کروی میں دو زاوئے اور ایک ضلع ان زاویوں میں سے ایک زاویہ کے مقابل کا معلوم ہے مثلاً ا و ب و طا

سَ = ک – اَ – بَ = ک – ا – ب تقریباً اور

$$\text{ح} = \frac{\text{سہ}^2 \text{ جب بَ جب سَ}}{\text{۲ جب (بَ + سَ)}}$$

اور اسکا حساب ہوسکتا ہے کیونکہ بَ و سَ تقریباً معلوم ہوگئے

(۱۰۸) عظمت اور سود مندی ضابطہ لیجنڈر کی اوسوقت ظاہر ہوتی ہے کہ اوسکو سطح کرہ ارضی کی پیمایش میں استعمال کرتی ہیں اور اس تخمینی او تقریبی حساب کا امتحان صحت بخوبی کرسکتے ہیں اب ہم چند مثالیں حل کرکی اس باب میں لکھتے ہیں تاکہ طالب علموں کو اوسمیں مشق ہوجاے ہم پہلی ثابت کرائی ہیں کہ ازدیاد کروی مثلث کی تقریباً $\frac{\text{ح}}{\text{لو}^2}$ ہے اب ہم اپنی تحقیقات کی ہدایت اس طرح کرتی ہیں کہ ازدیاد کروی مثلث کی قیمت نہایت تقریبی دریافت ہوجاے

(۱۰۹) ازدیاد کروی کی تخمینی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ ز ازدیاد کروی کو تعبیر کرتا ہے

$$\text{جب } \tfrac{1}{2}\text{ز} = \frac{\text{جب } \tfrac{1}{2} \text{ طا جب } \tfrac{1}{2} \text{ طب جب س}}{\text{جم } \tfrac{1}{2} \text{ طس}}$$

اسیواسطے تقریباً

جب ½ ز = جب س (سہ صہ / ۴ لو۲) (۱ − سہ۲ / ۲۴ لو۲) (۱ − صہ۲ / ۲۴ لو۲) (۱ − لر۲ / ۸ لو۲)^-۱

= جب س (سہ صہ / ۲ لو۲) (۱ + (۳ لر۲ − سہ۲ − صہ۲) / ۲۴ لو۲)

اسیواسطے ز = جب س (سہ صہ / ۲ لو۲) (۱ + (۳ لر۲ − سہ۲ − صہ۲) / ۲۴ لو۲) . . . (۱)

اور جب س = جب (سَ + ⅓ ز) = جب سَ + ⅓ ز جم س

= جب سَ + (جب سَ جم سَ / ۳) . (سہ صہ / ۲ لو۲) = جب سَ (۱ + (سہ۲ + صہ۲ − لر۲) / ۱۲ لو۲) . . (۲)

ز = (سہ صہ / ۲ لو۲) (۱ + (سہ۲ + صہ۲ + لر۲) / ۲۴ لو۲)

پس اسی معلوم ہوا کہ رقبہ مثلث کروی کا رقبہ مثلث مستقیمۃ الاضلاع سی بقدر (سہ۲ − صہ۲ + لر۲) / ۲۴ لو۲ کے زیادہ ہوتا ہے

(۱۱۰) تقریبی قیمت جب ا / جب ب کی دریافت کرو

جب ا / جب ب = جب ط / جب طَ

اسی معلوم ہوا کہ تخمیناً جب ا / جب ب = (سہ / صہ) (۱ − سہ۲ / ۶ لو۲ + سہ۴ / ۱۲۰ لو۴) / (۱ − صہ۲ / ۶ لو۲ + صہ۴ / ۱۲۰ لو۴)

= (سہ / صہ) (۱ − سہ۲ / ۶ لو۲ + سہ۴ / ۱۲۰ لو۴ + صہ۲ / ۶ لو۲ − سہ۲ صہ۲ / ۳۶ لو۴ − صہ۴ / ۱۲۰ لو۴ + صہ۴ / ۳۶ لو۴)

= (سہ / صہ) (۱ + (صہ۲ − سہ۲) / ۶ لو۲ + (سہ۴ − صہ۴) / ۱۲۰ لو۴ + صہ۲ (صہ۲ − سہ۲) / ۳۶ لو۴)

= (سہ / صہ) (۱ + ((صہ۲ − سہ۲) / ۶ لو۲) (۱ + صہ۲ / ۶ لو۲ − (سہ۲ + صہ۲) / ۲۰ لو۲))

= (سہ / صہ) (۱ + ((صہ۲ − سہ۲) / ۶ لو۲) (۱ + (۷ صہ۲ − ۳ سہ۲) / ۶۰ لو۲))

(۱۱۱) مم ب − مم ا کو تقریباً بیان کرو

مم ب − مم ا = (۱ / جب ب) (جم ب − (جب ب / جب ا) جم ا)

پس بموجب دفعہ ۱۱۰ کے تقریباً

مم ب − مم ا = (۱ / جب ب) (جم ب − (صہ / سہ) جم ا − (صہ (سہ۲ − صہ۲) / ۶ لو۲ سہ) جم ا)

دفعہ ۷۶ میں ثابت کرائی ہیں کہ تقریباً

$$\text{جم ا} = \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2}{2\,\text{لہ صہ}} + \frac{\text{سہ}^4 + \text{صہ}^4 + \text{لہ}^4 - 2\text{سہ}^2\text{صہ}^2 - 2\text{صہ}^2\text{لہ}^2 - 2\text{لہ}^2\text{سہ}^2}{24\,\text{صہ لہ لق}^2}$$

اسیواسطی $\text{جم ب} - \frac{\text{صہ}}{\text{سہ}}\,\text{جم ا} = \frac{\text{سہ}^2 - \text{صہ}^2}{\text{سہ لہ}}$ تقریباً

اور $\text{مم ب} - \text{مم ا} = \frac{\text{سہ}^2 - \text{صہ}^2}{\text{سہ لہ جب ب}} - \frac{\text{سہ}^2 - \text{صہ}^2}{\text{سہ لہ جب ب}} \cdot \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2}{12\,\text{لق}^2}$

$$= \frac{\text{سہ}^2 - \text{صہ}^2}{\text{سہ لہ جب ب}}\left(1 - \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2}{12\,\text{لق}^2}\right)$$

(۱۱۲) دفعات ۱۰۹ و ۱۱۰ میں اوس رقم تک جنمیں لق⁴ تک ملتا ہے تقریبی قیمتیں صحیح ہیں اور دفعہ ۱۱۱ میں اوس رقم تک جسمیں لق² ہی تخمینی قیمتیں درست ہیں اور یہہ بہی معلوم رہی کہ ہم تقریبی قیمتیں دفعہ اینده میں اوس رقم تک نکال سکتی ہیں جسمیں لق⁴ موجود ہے

(۱۱۳) لیجنڈر صاحب کی ضابطہ سی جو غلطی مثلث کروی کی طول ضلع کی حساب لگانی میں واقع ہوتی ہے اوسکی تخمینی و تقریبی قیمت دریافت کرو

فرض کرو کہ ضلع صہ معلوم ہی اور ضلع سہ مطلوب ہے اور ۳ لب ازدیاد کروی کو تعبیر کرتا ہے تو تقریبی قیمت $\frac{\text{صہ جب}(\text{ا} - \text{لب})}{\text{جب}(\text{ب} - \text{لب})}$ اوس ضلع کی واسطی لی گئی ہی کہ جسکی اصل قیمت سہ ہے

فرض کرو کہ $\text{لا} = \text{سہ} - \frac{\text{صہ جب}(\text{ا} - \text{لب})}{\text{جب}(\text{ب} - \text{لب})}$ تو لا کی قیمت تقریباً ہم کو دریافت کرنی ہے

اب تقریباً $\frac{\text{جب}(\text{ا} - \text{لب})}{\text{جب}(\text{ب} - \text{لب})} = \frac{\text{جب ا} - \text{لب جم ا} - \frac{\text{لب}^2}{2}\text{جب ا}}{\text{جب ب} - \text{لب جم ب} - \frac{\text{لب}^2}{2}\text{جب ب}}$

$$= \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}\left(1 - \text{لب مم ا} - \frac{\text{لب}^2}{2}\right)\left(1 - \text{لب مم ب} - \frac{\text{لب}^2}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}\left[1 + \text{لب}(\text{مم ب} - \text{مم ا}) + \text{لب}^2\,\text{مم ب}(\text{مم ب} - \text{مم ا})\right]$$

$$= \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} + \frac{\text{لب جب ا}}{\text{جب ب}}(\text{مم ب} - \text{مم ا})(1 + \text{لب مم ب})$$

یہہ صورہی اون رقموں تک جنمیں لق² ہے صحیح ہیں

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}} = \frac{\text{سہ}}{\text{صہ}}\left(1 + \frac{\text{صہ}^2 - \text{سہ}^2}{6\,\text{لق}^2}\right)$$

$$\text{مم ب} - \text{مم ا} = \frac{\text{سہ}^2 - \text{صہ}^2}{\text{سہ لہ جب ب}}\left(1 - \frac{\text{صہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{سہ}^2}{12\,\text{لق}^2}\right)$$

$$1 + \text{لب مم ب} = 1 + \frac{\text{سہ}^2 + \text{لہ}^2 - \text{صہ}^2}{12\,\text{لق}^2}$$

اسی معلوم ہوا کہ تقریباً

$$\frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}\left(\text{مم ب} - \text{مم ا}\right)\left(\text{ا} + \text{لب مم ب}\right) = \frac{\text{سہ}^2 - \text{صہ}^2}{\text{صہ لر جب ب}}$$

اسیواسطی $\text{لا} = \text{سہ} - \frac{\text{صہ جب ا}}{\text{جب ب}} - \frac{\text{لب}\left(\text{سہ}^2 - \text{صہ}^2\right)}{\text{لر جب ب}}$

$$= \frac{\text{سہ}\left(\text{صہ}^2 - \text{سہ}^2\right)}{6}\left\{\frac{6\ \text{لب}}{\text{سہ لر جب ب}} - \frac{1}{\text{لو}^2} + \frac{3\ \text{سہ}^2 - 7\ \text{صہ}^2}{60\ \text{لو}^4}\right\}$$ بموجب دفعہ ۱۱ کے

ہم لب کا حساب اگر اس صورت $\text{لب} = \frac{\text{سہ لر جب ب}}{6\ \text{لو}^2}$ سی کریں تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{لا} = \frac{\text{سہ}\left(\text{صہ}^2 - \text{سہ}^2\right)\left(3\ \text{سہ}^2 - 7\ \text{صہ}^2\right)}{360\ \text{لو}^4}$$

اگر لا کی قیمت کا حساب موافق (۱) دفعہ ۱۰۹ اکی کریں تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لب} = \frac{\text{سہ لر جب ب}}{6\ \text{لو}^2}\left(1 + \frac{3\ \text{صہ}^2 - \text{سہ}^2 - \text{لر}^2}{24\ \text{لو}^2}\right)$$

اسیواسطے $\text{لا} = \frac{\text{سہ}\left(\text{صہ}^2 - \text{سہ}^2\right)\left(\text{سہ}^2 + \text{صہ}^2 - 5\ \text{لر}^2\right)}{720\ \text{لو}^4}$

امثلہ متفرقہ

(۱) اگر مثلث کروی کی ضلعی اب اور اس کی بَ اور سَ تک ایسی خارج کی جائیں کہ ببَ اور سسَ نصف تکملہ اب اور اس کی ہوں تو ثابت کرو کہ قوس بَسَ کی محاذی مرکز کرہ پر زاویہ جو واقع ہوگا برابر ہوگا اوس زاویہ کی جو درمیان اوتار اب اور اس کی واقع ہوگا

(۲) لیجنڈر کا ضابطہ اس صورت سی ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^2\ \frac{\text{ا}}{2} = \frac{\text{جب}\ \frac{1}{2}\left(\text{طا} + \text{طب} - \text{طس}\right)\ \text{جب}\ \frac{1}{2}\left(\text{طس} + \text{طا} - \text{طب}\right)}{\text{جب}\ \frac{1}{2}\left(\text{طب} + \text{طس} - \text{طا}\right)\ \text{جب}\ \frac{1}{2}\left(\text{طا} + \text{طب} + \text{طس}\right)}$$

(۳) چار نقاط ا ب س د سطح مستدیر کرہ پر ہیں اور اوسکی درمیان قوسیں دوائر عظیمہ کی لائی گئی ہیں اور ی اور ف نقاط وسط اس اور ب د کی تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم اب} + \text{جم ب س} + \text{جم س د} + \text{جم د ا} = 4\ \text{جم ا ی جم ب ف جم ف ی}$$

(۴) ایک دائرہ صغیرہ کرہ کی اوپر ہی اوسکی اندر ذوار بعۃ الاضلاع اب س د بنائی گئی ہے اسطرح کہ ا اور س مقابل کی زاویئی قطر کی اطراف مقابل پر ہیں تو مجموعہ اضلاع کی جیب التماموں کا ایک مقدار مستقل ہوگی

(۵) ا ب س ایک مثلث کروی ہے جسکی ضلعی ربعات دائرہ ہیں اور ق ایک نقطہ مثلث کی اندر ہے
تو ثابت کرو کہ جم ق ا جم ق ب جم ق س + مم ب ق س مم س ق ا مم ا ق ب =

اور مس ا ب ق مس ب س ق مس س ا ق = ۱

(۶) اگر ی نقطہ وسط مثلث متساوی الاضلاع ا ب س کا ہو اور ق کوئی نقطہ سطح مستدیر کرہ پر تو

$\frac{1}{4}$ (مس ق ی مس ی ا)^{2} (جم ق ا + جم ق ب + جم ق س)^{2} =

جم^{2} ق ا + جم^{2} ق ب + جم^{2} ق س − جم ق ا جم ق ب − جم ق ب جم ق س − جم ق س جم ق ا

(۷) اگر مثلث ا ب س کا ہر ایک ضلع ربع ۔ ہو اور ی قطب دائرہ اندرونی مثلث کا ہو اور ق
نقطہ سطح مستدیر کرہ پر ہو تو جم (ق ا + جم ق ب + جم ق س)^{2} = ۳ جم^{2} ق ی

(۸) سطح مستدیر کرہ پر تین نقطوں میں سے ہر یک سے قوسین ایک دائرہ عظیم کرہ کے تین نقطوں
تک کھینچی گئی ہیں اور اونکی جیب التمامیں طا و طب و طس و طاَ و طبَ و طسَ اور طاً و طبً و طسً ہیں
تو ثابت کرو کہ طا طبَ طسً + طاَ طبً طس + طاً طب طسَ = طا طبً طسَ + طاَ طب طسً
+ طاً طبَ طس

(۹) دفعات ۱۱۰ اور ۱۱۱ سے ثابت کرو کہ تخمیناً

لوک صہ = لوک سہ + لوگ جب ب − لوک جب ا + $\frac{\text{ح}}{\text{۳ لو}^{2}}$ (مم ا − مم ب)

(۱۰) دفعہ ۱۱۰ میں تقریبی حساب اون رقموں تک کرو جنمیں لو^{4} شامل ہے تو ثابت کرو کہ تقریباً

جم ا = جم اَ − $\frac{\text{صہ لر جب اَ}}{\text{۶ لو}^{2}}$ + $\frac{\text{صہ لر (سہ}^{2}\text{ − ۳ صہ}^{2}\text{ − ۳ لر}^{2}\text{) جب اَ}}{\text{۱۸۰ لو}^{4}}$

(۱۱) نتیجہ گذشتہ سی ثابت کرو کہ اگر ا = اَ + بز تو تخمیناً

بز = $\frac{\text{لر صہ جب اَ}}{\text{۶ لو}^{2}}$ (۱ + $\frac{\text{۷ صہ}^{2}\text{ + ۷ لر}^{2}\text{ + سہ}^{2}}{\text{۱۲۰ لو}^{2}}$)

باب دہم مساحت ارض اور قطعات ارض

(۱۱۴) بڑا فایدہ دونو علم مثلث مستوی اور کروی کا یہ ہے کہ کل زمین کی حدود اور شکل یا اوسکے
قطعات سطح مستدیر کی خوب تحقیقات اونکی استعانت سی کریں ۔ اس مطلب کو اختصار کے

کے ساتھہ بیان کرتی ہین ایسی پیمائشون کا بیان پڑہنا ضروری ہی رُڑکی کالج کی کتابون مین اس مطلب کو دیکھو اونمین بڑی توضیح کے ساتھہ وہ لکھا ہوا ہے

(۱۱۵) کوئی پیمایش ہو اوسمین بڑی بات یہہ ہی کہ خطا فقی کی پیمایش کیجاوی اور اس خطا فقی کو قاعدہ کہتی ہین ایک ہموار زمین کئی میل لنبی اس کام کی لئی منتخب کیجاتی ہی اور اوسپر خط کی پیمایش نہایت صحت سی ہوتی ہی گز لکڑی کی اور دہات کی اور سلیسون کی خالی نلیان اور جریبین لوہی کی مختلف طرح کی پیمایش مین کام اتی ہین اور موسم کی گرمی اور سردی کا جو کچھہ اثر اون پر ہوتا اوسکا بہی نہایت لحاظ رہتا ہی اور جو کچھہ تفاوت اس اثر سی ہوتا ہی وہ بہی نہایت احتیاط سی محسوب ہوتا ہی موسمون کی تاثیر سی گزون اور جریبون کا طول بڑہ جاتا ہی اس افزایش طول کو حساب مین مجرا لیتی ہین

(۱۱۶) جب کسی ملک کی پیمایش کرنی منظور ہوتی ہی تو اوسمین مناسب موقعی تلاش کر کے مقرر کرتی ہین اور وہان نشانیان قایم کرتی ہین اور پہر ان نشانیونمین خطوط وصل کر کی ملک کو مثلثون مین تقسیم کر لیتی ہین پہر ان مثلثون کی زاویون کا مشاہدہ کر کی پیمایش کرتی ہین یعنی اون زاویون کو ناپتی ہین جو دو نشانیون کی محاذی زاویہ تیسرے نشانی پر واقع ہو فرض کرو کہ ا اور ب اطراف قاعدہ کی ہین اور س ایک تیسرے نقطہ پر نشان ا اور ب سے دکہائی دیتا ہی تو مثلث ا ب س مین زاویہ ا ب س اور ب اس کا مشاہدہ کرینگے تو اوسی ا س اور ب س کا حساب لگ جایگا اب پہر فرض کرو کہ د ایک اور نشان چوتہی نقطہ پر ہی کہ وہ س اور ا سی دکہائی دیتا ہی تو زاویہ اس د اور س ا د کا مشاہدہ کرینگے اور چونکہ ا س معلوم ہی اسلئی س د اور ا د کا حساب لگا لینگے

(۱۱۷) علاوہ اصلی قاعدہ کے اور بہت سی خطوط ملک مین جنکی پیمایش ہوتی ہی بنائی جاتی ہین اور پہر ان پیمایش کئی ہوئی طولون کا مقابلہ اون طولون سی کیا جاتا ہی جو مثلثون کا ایک سلسلہ بنا کر باعتبار اصلی قاعدہ کی حساب سی نکالتی ہین جسقدر ان طولون مین تفاوت

کم ہوگا اوتنی ہی صحت حساب پیمایش مین ہوگی

(۱۱۸) پیمایش مین تمام مثلثون کی اضلاع کی طولون کی دریافت کرنی کی مختلف حکمتین اور ترکیبین ہین ایک ترکیب تو یہہ ہی کہ مثلث کروی کی صور کو ٹہیک ٹہیک کام مین لائین —— کرہ ارض کا نصف قطر تخمیناً و تقریباً نہایت صحت کی ساتہہ معلوم ہی اس نصف قطر کو ق سی تعبیر کرو پس اگر سہ طول کسی قوس کا ہو تو مقیاس قوس اوسکی سامنی کی زاویہ مرکزی کا سہ÷ق ہوگا اور علم مثلث کروی کے صور قانونیہ جملے علم مثلثی سہ÷ق کے بیان کرنی کی لئی حاصل ہوتے ہین پس اوسی سہ÷ق دریافت ہوگا اور بعد ازان سہ دریافت ہو جایگا —— چونکہ عمل پیمایش مین سہ÷ق ایک نہایت چہوٹی مقدار ہوتی ہے اس سبب سی یہہ ضرور ہوا کہ ہم توجہ اون چہوٹی زاویون کی علم مثلثی جملون کی لوکارثم کی طرف کرین جسسے حساب مین بڑی درجہ کی صحت حاصل ہو

مثلثات کروی کی ٹہیک ٹہیک حساب کی بجای بہت سی مختلف ترکیبین تقریبی حساب کی ہین لیکن صرف یہہ دو اونمین سی کام مین اتی ہین اول یہہ ہی کہ مثلث کروی کی زاویون سی مثلث وتری کے زاویون کو تخمینا بموجب دفعہ ۱۰۵ کی دریافت کرین اور پہر مثلث وتری کا حل مثلث مستقیم الاضلاع سی کرین دوسری ترکیب یہہ ہی کہ بموجب ضابطہ لیجینڈر کی تقریبی اور تخمینی قیمتین بموجب دفعہ ۱۰۶ کی کالین

(۱۱۹) تین ترکیبین جو اوپر بیان ہوئین وہ ملک فرانس کی پیمایش کرنی مین ڈلمبر کام مین لایا اور جب گریٹ برٹن کی پیمایش ہوئی تہی تو اوسوقت ملک کے علم مثلثی مساحت مین مثلثون کی پیمایش ترکیب وتری سی کی تہی مگر اب وہ مدت سی متروک ہی اور اوسکی جگہ اکثر لیجینڈر کا ضابطہ کام مین اتا ہے لفٹنٹ کرنیل اوورسٹ ہندوستان کی علم مثلثی مساحت مین بہی ضابطہ لیجینڈری کو کام مین لایا تہا

(۱۲۰) اگر مثلث مستقیم الاضلاع کی تینون زاوئی مشاہدہ کیے جائین تو اونکی صحت کی لئی یہہ شہادت کافی ہی کہ مجموعہ اونکا برابر دو قائمون کی ہو اب ہم یہہ بیان کرینگی کہ مثلث کروی جو سطح مستدیر زمین پر بنائی جائین اونمین زاویون کی مشاہدات کی صحت ازدیاد کروی کی امتحانات سی کس طرح اور کہان تک ہو سکتی ہے

(۱۲۱) سطح زمین پر مثلث کروی بنایا جاوے اور اوسکا رقبہ فٹ مربعوں مین معلوم ہو تو کوئی قاعدہ ایسا قایم کرو کہ ازدیاد کروی سے حساب ثانیون مین ہوا کرے

فرض کرو کہ ن تعداد ثانیوں کی ازدیاد کروی مین ہے اور مثلث کی رقبہ مین ح تعداد فٹ مربعوں کے ہے اور ق تعداد فٹوں کی نصف قطر زمین مین ہے پس اگر ز مقیاس قوسی ازدیاد کروی کا ہو تو

$$ح = ز ق^2 \text{ اور}$$

$$ز = \frac{ن ک}{۶۰ \times ۶۰ \times ۱۸۰} = \frac{ن}{۲۰۶۲۶۵} \text{ تخمیناً}$$

$$\text{اسیواسطے } ح = \frac{ن ق^2}{۲۰۶۲۶۵}$$

اب بڑی تحقیقات سے یہہ بات دریافت ہوئی ہے کہ طول ایک درجہ کا سطح مستدیر کرہ پر ۳۶۵۱۵۵ فٹ لمبا ہے

$$\text{پس } \frac{ک ق}{۱۸۰} = ۳۶۵۱۵۵$$

اس مساوات سے جو قیمت ق کی دریافت ہو تو لوکارثم کی حساب سے یہہ دریافت ہوتا ہے کہ

$$لو ن = لو ح - ۹٫۳۲۶۷۴$$

پس اسے معلوم ہوا کہ اگر ح معلوم ہو تو ن دریافت ہو جائیگا

اس قاعدہ کو جنرل روئی کا قاعدہ کہتے ہین جب وہ ہنوز تی گریٹ برٹن اور ایرلنڈ کی مثلثی پیمایش کی تہی تو وہ اس قاعدہ کو کام مین لائی تہی ستر ڈلوس کہتا ہی کہ یہہ قاعدہ ستر ڈلبی نی ایجاد کیا تہا

(۱۲۲) جنرل روی کا قاعدہ جب کام مین اسکتا ہی کہ رقبہ مثلث کروی کا معلوم ہو اور مثلث کروی کا رقبہ جب ٹہیک ٹہیک دریافت ہوگا کہ اجزاء مثلث کی صحیح صحیح معلوم ہون لیکن ایسی موقعوں پر تقریبی اور تخمینی رقبہ معلوم ہونا کافی سمجھا جاتا ہی مثلاً فرض کرو کہ ہم رقبہ مثلث مستقیمۃ الاضلاع کا موافق ضابطہ لیجنڈر کے مثلث کروی کی رقبہ کی جگہ کام مین لائین تو دفعہ ۱۰۹ کی موافق غلطی تخمینہ مین بقدر کسر $\frac{س^2 + ص^2 + ل^2}{۲۴ ق^2}$ رقبہ سابق کی موافق ہوگی اور یہہ ۱/۱۰۰۰۰۰ سے کم ہے اگر طول اضلاع کا ۱۰۰۰ میل سے زائد نہو۔ یا یہہ فرض کرو کہ ہم رقبہ کے حساب کرتی مین تخمینہ غلطیوں کا جو زاویوں مین واقع ہوتی ہین دریافت کرتی ہین تو فرض کرو کہ ایک غلطی کا

مقیاس ہوسی ع ہو پس بجای کہ ـــ کی جگہہ ہم ـــ کام مین لائیں تو غلطی کی رقبہ سی نسبت تخمیناً ع م م س ہوگی اب مشاہدات حال مین غ چیند ثانیہ کی زاویہ کے مقیاس ہوسی بڑی نہ ہوگی پس اگر س بہت چھوٹا نہ ہو تو ع م م س عملاً قابل خیال کے نہین ہے

(۱۲۳) مثال ذیل وڈہوس صاحب کی (انگریزی پیمایش) سی منتخب کرکی لکھی اور اوردون نے اس کو اختیار کیا ہی کہ ایک مثلث کی زاوئی مشاہدہ کی ہوئی ۴۲° و ۲′ ۳۲″ اور ۷° و ۵۵′ و ۹″ اور ۸۰° و ۲′ و ۴۸″ ہین تو مجموعہ غلطیون کا جو مشاہدات مین واقع ہوئی دریافت کرنا مطلوب ہے فرض کرو کہ زاویہ ا کی مقابل کا ضلع ۲٫۴۰ ۲۷۴ فیٹ ہی تو رقبہ کا حساب اس حساب ـــ سی ہوگا اور جدول روی کی قاعدہ کی موافق ن = ۲۳٫ اب مجموعہ مشاہدہ کئی ہوئی زاویون کا = ۱۸۰° - ۱″ اور وہ ۱۸۰° + ۲۳٫ ہونا چاہیے تھا سی معلوم ہوا کہ مشاہدات مین غلطی بقدر بقدر ۱٫۲۳″ کے ہی

اب یہہ مشاہدہ کرنی والی کی رای پر رہا کہ اس غلطی مشاہدات کو مشاہدہ کی ہوئی زاویون پر تقسیم کردی ایک ترکیب یہہ ہی کہ تہائی ۱٫۲۳″ کی ہر یک زاویہ پر زیادہ کردی اور اس طرح جو زاوئی حاصل ہون اونکو اصلی زاوئی مانین

(۱۲۴) ایک تحقیقات مثلث کی صورت کی باب مین کی گئی ہی کہ جسی زاویون کی مشاہدہ کرنے مین جو غلطیان واقع ہوئی ہین اونکا اثر اضلاع مثلث کی طولون پر بہت ہی کم ہو اگر دلیل ٹھیک نہین ہی مگر پہر بہی وہ طالب علمون کی توجہ کی قابل ہی - فرض کرو کہ مثلث کی تینون زاوئی مشاہدہ کی گئی ہین اور ایک ضلع ط معلوم ہی اب مطلوب یہہ ہی کہ مثلث کی کیا صورت ہو جو اغلاط مشاہدات کا اثر اور اضلاع کے طولون پر بہت ہی کم ہو - فرض کرو کہ از دیاد کروی نہایت صحت کی ساتھہ جو عمل کی لئی کافی ہی معلوم ہی اگر مشاہدہ کی ہوئی زاویون کا مجموعہ دو قائمون سی بقدر ازدیاد کروی کی نہین ہی تو ان زاویون کو بدل ڈالو اور ایک مقدار زیادہ کرو کہ اونکا مجموعہ صحیح ہو جائی - فرض کرو کہ ا و ب و س زاوئی ہین جو اسطرح

مشاہدہ سے دریافت ہوئی ہیں اور جو ضرورت کی حالت میں بدلی بھی گئی ہیں
اور فرض کرو کہ ع ا و غ ب و ع س غلطیاں ا و ب و س کی ہیں تو ع ا + ع ب + ع س = ۰
اسیواسطے کہ بموجب فرض کی ا و ب و س کا مجموعہ صحیح ہی اب مثلث کو مثلث مستقیمۃ الاضلاع تقریباً
فرض کریں تو صحیح قیمت ضلع طس کی یہہ ہوگی $\frac{\text{طا جب (س + ع س)}}{\text{جب (ا + ع ا)}}$ یعنی $\frac{\text{طا جب (س + ع س)}}{\text{جب (ا − ع ب − ع س)}}$
اب تقریباً
جب (س + ع س) = جب س + ع س جب س (علم مثلث مستقیم الاضلاع باب ۱۲)
جب (ا − ع ب − ع س) = جب ا − (ع ب + ع س) جم ا
اسی تقریباً ہم کو یہہ معلوم ہوا کہ

$$\text{طس} = \frac{\text{طا جب س}}{\text{جب ا}} \left\{ ۱ + \text{ع س مم س} \right\} \left\{ ۱ - (\text{ع ب} + \text{ع س}) \text{ مم ا} \right\}^{-۱}$$

$$= \frac{\text{طا جب س}}{\text{جب ا}} \left\{ ۱ + \text{ع ب مم ا} + \text{ع س} (\text{مم س} + \text{مم ا}) \right\}$$

اور مم س + مم ا = $\frac{\text{جب (ا + س)}}{\text{جب ا جب س}}$ = $\frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا جب س}}$ تخمیناً
پس اسی معلوم ہوا کہ غلطی میں تخمیناً

$$\frac{\text{طا جب ب}}{\text{جب ا}} \text{ ع س} + \frac{\text{طا جب س جم ا}}{\text{جب}^۲ \text{ ا}} \text{ ع ب ہے}$$

اور علی ہذا القیاس غلطی طب کی تقریباً

$$\frac{\text{طا جب س}}{\text{جب}^۲ \text{ ا}} \text{ ع ب} + \frac{\text{طا جب ب جم ا}}{\text{جب}^۲ \text{ ا}} \text{ ع س ہے}$$

اب یہہ ناممکن ہی کہ ٹھیک ٹھیک علامتیں اور مقدار اغلاط ع ب اور ع س کی مقرر کرسکیں
اسلئے دلیل ٹھیک نہ ہوئی — یہہ ظاہر ہی کہ اگر غلطی کو چھوٹا کرنا ہو تو جب ا کو چھوٹا کرنا چاہئے
اور چونکہ مجموعہ ع ا و ع ب و ع س کا برابر صفر کی ہی تو اونمیں سی دو کی ایک علامت
ہونی چاہیئے اور س کی اوسی خلاف اسیواسطے ہم کو یہی دو ع ب اور ع س کی مختلف
علامتوں کی ہونی کا بہ نسبت یکساں علامت ہونی کی زیادہ خیال کرسکتی ہیں
اگر ع ب اور ع س کی مختلف علامتیں ہیں اور جم ا مثبت ہی تو طب اور طس میں چھوٹی

غلطیان واقع ہونگین بہ نسبت اون غلطیون کی جو جم اکی منفی ہونی مین واقع ہوتین اسواسطی اچھا ہی کہ قائمہ سی چھوٹا ہو — اور اگر علبہ اس بات کا ہو کہ ع ا اور ع ب مین بہت اختلاف نہین ہین تو ب اور س تقریباً مساوی ہونگی اور یہہ شرائط اوس صورت مین پوری ہونگین کہ مثلث مثلث متساوی الاضلاع سی بہت اختلاف نہ رکھی

اگر صرف دو زاوئی ا اور ب مشاہدہ کئی جاوین تو ہم کو وہی جملی ط ب اور ط س کی اغلاط کی لئی حاصل ہونگی جو سابق مین حاصل ہوئی ہتی لیکن کوئی وجہ زیادہ قوی ع ب و ع س کی علامتین مختلف ہونی کی بہ نسبت یکسان علامت ہونی کی نہین ہی اس صورت مین فرض کرنا کہ ا ایک قائمہ ہی غالباً اغلاط کو نہایت چھوٹا بناویگا

(۱۲۵) بڑا عقدہ مشکل اوس صورت مین آنکر پڑتا ہی کہ جسوقت ع ب اور ع س تقریباً مساوی خیال کئی جاوین اسواسطے کہ ع ا + ع ب + ع س = ۰ پس اگر ع ب اور ع س کو تقریباً مساوی اور مختلف العلامت خیال کرتی ہین تو حقیقت مین ع ا = ۰ تقریباً فرض کرتی ہین پس تینون زاویون کی مشاہدہ کرنی مین ہم خیال کرتی ہین کہ جو ایک دفعہ مشاہدہ کرتی مین غلطی واقع ہوتی ہی وہی غلطی تعداد کی دوسری دفعہ مشاہدہ کرنی مین واقع ہوئی ہی اور باقی مشاہدہ مین کوئی غلطی نہین واقع ہوتی

(۱۲۶) ابتک ہم نی زمین کو ایک کرہ کامل کی شکل فرض کیا ہی لیکن حقیقت مین اوسکی شکل ایسی کرہ کی ہی جو سرون پر سی چپٹا اور بیچ مین سی پہولا ہوا ہو زمین کی اس شکل کی ہونی کی سبب سے بہی غلطیان واقع ہوتی ہین اوسکا بیان اور کتابون مین ہے

(۱۲۷) زمین اور قطعات زمین کی پیمایش مین ہم کو بعض اوقات ضرورت ہوتی کہ زاویہ افقی درمیان دو نقطون کی مشاہدہ کرین ان نقطون کے درمیان افق سی فاصلہ قوسی ہوتا ہے زاویہ جو محاذی ان نقطون کی واقع ہو معلوم ہے اور زاویہ ارتفاع یا زاویہ پستی بہی جانتی ہین

فرض کرو کہ ی ا اور ی ب وہ دو سمتیں ہیں جنمیں دو نقطے ی سے دکھائی دیتے ہیں اور فرض کرو کہ زاویہ ا ی ب مشاہدہ کیا جاوے اور ی ط سمت عمودی مشاہدہ کرنے والے کی افق پر ہو ایک کرہ مرکز ی کے گرد کھینچو اور ی ا اور ی ب میں جو سطحیں گذرتی ہیں وہ افق سے ی س اور ی د پر ملتی ہیں تو زاویہ مطلوب س ی د ہے

فرض کرو کہ ا ی ب = بر اور س ی د = بر + لا اور ا ی س = ھہ اور ب ی د = کہ

مثلث ا ط ب میں جم ا ط ب $= \frac{\text{جم بر} - \text{جم ط ا جم ط ب}}{\text{جب ط ا جب ط ب}} = \frac{\text{جم بر} - \text{جب ھہ جب کہ}}{\text{جم ھہ جم ک}}$

اور جم ا ط ب = جم س ی د = جم (بر + لا) پس

$$\text{جم (بر + لا)} = \frac{\text{جم بر} - \text{جب ھہ جب ک}}{\text{جم ھہ جم ک}}$$

یہہ تو صورت تحقیقی ہی اور تخمینہ سے ہم کو یہہ صورت تخمینی حاصل ہوگی

$$\text{جم بر} - \text{لا جب بر} = \frac{\text{جم بر} - \text{ھہ کہ}}{1 - \frac{1}{2}(\text{ھہ}^2 + \text{ک}^2)}$$

اسواسطے لا جب بر $= \text{ھہ ک} - \frac{1}{2}(\text{ھہ}^2 + \text{ک}^2)$ جم بر تقریباً

$$\text{اور لا} = \frac{2\,\text{ھہ ک} - (\text{ھہ}^2 + \text{ک}^2)(\text{جم}^2 \tfrac{1}{2}\text{بر} - \text{جب}^2 \tfrac{1}{2}\text{بر})}{2\,\text{جب بر}}$$

$$= \frac{1}{4}(\text{ھہ} + \text{کہ})^2 \,\text{مماس}\, \frac{1}{2}\text{بر} - \frac{1}{4}(\text{ھہ} - \text{کہ})^2 \,\text{مم}\, \frac{1}{2}\text{بر}$$

اس عمل سے زاویہ س ی د کو زاویہ ا ی ب سے دریافت کرنیکو زاویہ افقی کے تحویل کہتے ہیں

باب یازدہم

اجزاء مثلث کروی کے چھوٹی چھوٹی تبدیلیاں اور مثلث کروی اور مثلث مستقیمۃ الاضلاع کے درمیان جو تعلقات ہیں

(۱۲۸) بعض اوقات اس امر کا دریافت کرنا ایک بڑی بات ہوتی ہی کہ اجزاء معلومہ میں غلطی خفیف سی کسی جز مطلوب کے حساب لگانی میں کسقدر غلطی ہوجاتی ہی — یہاں ہم ایک مثال لکھتے ہیں

(۱۲۹) مثلث کروی کا ایک ضلع اور اوسکی مقابل کا زاویہ مقادیر مستقل ہیں باقی اجزا میں سی دو کی اندر جو خفیف تبدل ہو توان خفیف تبدیلیوں کے ربط کو دریافت کرو

فرض کروکہ س اور طس مستقل رہیں

(۱) اور ضلعوں کی خفیف تبدیلیوں کی درمیان تعلق دریافت کرو

ہم فرض کرتی ہیں کہ طا اور طب اوس مثلث کی اجزاء جو س اور طس کے مستقل مقرر کرنی سی بنتا ہے تعبیر کرتی ہیں اور طا + ع طا اور طب + ع طب ایک اور ایسی ہی مثلث کی اضلاع کو تعبیر کرتی ہیں تو ہم کو یہہ دریافت کرنا ہی کہ اوس حالت میں کہ غ طا اور ع طب نہایت خفیف ہوں تو اون میں کیا نسبت اور تعلق ہوگا

جم طس = جم طا جم طب + جب طا جب طب جم س

اور جم طس = جم (طا + ع طا) جم (طب + ع طب) + جب (طا + ع طا) جب (طب + ع طب)

اور نیز جم (طا + ع طا) = جم طا − جب طا ع طا تقریباً

جب (طا + ع طا) = جب طا + جم طا ع طا تقریباً

اور علی ہذا القیاس جم (طب + ع طب) اور جب (طب + ع طب) کے صورتیں ہیں (علم مثلث مستقیمۃ الاضلاع کا بارہواں باب دیکھو) پس

جم طس = (جم طا − جب طا ع طا) (جم طب − جب طب ع طب)

+ (جب طا + جم طا ع طا) (جب طب + جم طب ع طب) جم س

پس تفریق کرتی ہین اگر ہم حاصل ضرب ع طا ع طب کو کچھہ نہ خیال کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

= ع طا (جب طا جم طب - جم طا جب طب جم س)

+ ع طب (جب طب جم طا - جم طب جب طا جم س)

اسی نسبت ع طا و ع طب کی ارقام طا و طب و س مین معلوم ہونگی ہم اس نسبت کو سہل صورت مین ارقام ا او رب مین بیان کرسکتی ہین

اسواسطی کہ جب طا جب طب پر تقسیم کرتی سی ہم کو بموجب دفعہ ۴۴ کے یہہ حاصل ہوتا ہے

$\frac{\text{ع طا}}{\text{جب طا}}$ مم ب جب س + $\frac{\text{ع طب}}{\text{جب طب}}$ مم ا جب س = ۰

اسیواسطی ع طا جم ب + ع طب جم ا = ۰

(۲) اور زاویون کے خفیف تبدیلیون کی نسبت دریافت کرو

جو نتیجہ ہم ابہی اوپر نکال ائی ہین اوسمین بوسیلہ قطبی مثلث کی ہم یہہ مستنبط کرسکتی ہین کہ

ع ا جم طب + ع طب جم طا = ۰

اور یہہ دوسری طرح سی بہی حاصل ہوسکتا ہی جسمین کہ تعلق پہلے نتیجہ کا نہ ہو

(۳) ایک ضلع اور اوسکی مقابل کی زاویہ (ا و طا) کی درمیان خفیف تبدیلیون کا تعلق دریافت کرو

یہان جب ا جب طس = جب س جب طا اور

جب (ا + ع ا) جب طس = جب س جب (طا + ع طا)

پس تفریق کرنے سے جم ا جب طس ع ا = جب س جم طا ع طا

اور اسیواسطی ع ا مم ا = ع طا مم طا

(۴) ایک زاویہ اور اوسکے متصل کی ضلع (طا و ب) کے خفیف تبدیلیون کا تعلق دریافت کرو

ہم کو معلوم ہے کہ مم س جب ب = مم طس جب طا - جم ب جم طا

اگر عمل پہلی طرح سی کرین تو ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

مم س جم ب ع ب = مم طس جم طا ع طا + جم ب جب طا ع طا + جم طا جب ب ع ب

اسیواسطے (مم س جم ب − جم طا جب ب) ع ب = (مم طس جم طا + جم ب جب طا) ع طا

اسیواسطے (جم ا / جب س) ع ب = (جم طب / جب طس) ع طا

اسیواسطے ع ب جم ا = − ع طا مم طب جب ب

(١٤٠) اس باب کی اخیر مین ایسی مثالین بہت سی ہین جونکہ اونمین کچہہ دقت نہ تہی اسلئی وہ طالب علمان کے مشق کی لئی چہوڑ دی گئی ہین

(١٤١) علم مثلث کروی مین کسی صورت سی جسمین اجزا مثلث شامل ہون اور ان اجزا مین ایک ضلع بہی ہو تو اوسی ایک ویسی ہی صورت علم مثلث مستقیمۃ الاضلاع مین دریافت کرو

فرض کرو کہ ھ، و، ط اضلاع مثلث کی طولون کو تعبیر کرتا ہی اور لق نصف قطر کرہ کا ہے پس ھ/لق و/لق ط/لق مقیاس قوسی اضلاع مثلث کی ہوئی اب جملون ھ/لق و/لق و ط/لق کو جو کسی صورت مین واقع ہوتی ہین ھ/لق و/لق ط/لق کی قوارین پہلا کر لکہو پس اگر ہم یہہ فرض کرین کہ لق لانہایت زیادہ ہو گیا تو صور مذکور کی صور محدودہ تعلقات علم مثلث مستقیمۃ الاضلاع ہو جائینگے مثلا دفعہ ١٠٦ مین صور

جم ا = (جم طا − جم طب جم طس) / (جب طب جب طس)

ہم یہہ استنباط کرتے ہین کہ

جم ا = (ھ٢ + ط٢ − ک٢) / (٢ ھ ط) + (ک٤ + ھ٤ + ط٤ − ٢ ک٢ ھ٢ − ٢ ھ٢ ط٢ − ٢ ط٢ ک٢) / (٢٤ ھ ط لق٢) + …

اب اگر لق لا انتہا بڑا فرض کیا جاوی تو اخر کا یہہ حاصل ہوگا کہ

جم ا = (ھ٢ + ط٢ − ک٢) / (٢ ھ ط)

اور یہہ جملہ جم ا کی واسطی مثلث مستقیمۃ الاضلاع کی ارقام مین ہے

اور پہر دفعہ ١١٠ صورت سے

جب ا / جب ب = جب طا / جب طب سی ہم یہہ استنباط کرتے ہین کہ

جب ا / جب ب = ک / ھ + ک (ھ٢ − ک٢) / (٦ ھ لق٢) + ...

اب فرض کرو کہ ن لا انتہا بڑا ہو تو آخر کار ہم کو یہہ حاصل ہوگا

جب ا / جب ب = ک / ہ

یعنی مثلث مستقیمۃ الاضلاع کے اضلاع مین وہ نسبت ہوتی ہی جو اونکی مقابل کی زاویون کی جیب مین

امثلہ

(۱) اگر مثلث کروی مین س اور طس مقادیر مستقل رہین اور طا اور طب پر کوئی خفیف زیادتی ع طا اور ع طب کی کیجای تو ثابت کرو کہ

ع طا / √(۱ - ن² جب² طا) + ع طب / √(۱ - ن² جب² طب) = جیمین ن = جب س / جب طس

(۲) اگر س اور طس مقادیر مستقل رہین اور ایک ذرا سی تبدیلی طا مین کیجای تو بتاو اس تبدیلی کے سبب سے اور اجزاء مثلث مین کیا تبدیلی ہوگی اور اونکی رقبہ مین بھی تبدیلی دریافت کرو

(۳) فرض کرو کہ ا اور طس مقادیر مستقل ہین تو مساوات ذیل کو ثابت کرو کہ وہ دو دو اجزاء کے تبدیلیون کی تعلقات کو تعبیر کرتے ہین

جب س ع طب = جب طا ع ب ، ع ب جب س = - ع س مس طا

ع طا مس س = ع ب جب طا ، ع طا مس س = - ع س مس طا

ع طب جم س = ع طا ، ع ب جم طا = - ع س

(۴) فرض کرو کہ طب اور طس مقادیر مستقل ہین تو ذیل کی مساواتون کو ثابت کرو کہ وہ دو دو اجزاء کے خفیف تبدیلیون کو تعبیر کرتے ہین

ع ب مس س = ع س مس ب ، ع طا م س = - ع ب جب طا

ع طا = ع ا جب طس جب ب ، ع ا جب ب جم س = - ع ب جب ا

(۵) فرض کرو کہ ب اور س مقادیر مستقل ہین تو ذیل کی مساواتون کو ثابت کرو کہ وہ دو دو اجزاء کی خفیف تبدیلیون کو تعبیر کرتے ہین

ع طب مس طس = ع طس مس طب ، ع ا م طس = - ع طب جب ا

ع ا = ع طا جب طب جب س ع طا جب ب جم طس = ع طب جب ا

(۶) اس صورت جب $\frac{طا}{۲}$ = $\frac{\sqrt{-جم ح جم (ح - ا)}}{جب ب جب س}$ سے رقبہ مثلث مستقیمۃ الاضلاع

کے صورت مستنبط کرو یعنی $\frac{طا^۲ جب ب جب س}{۲ جب ا}$ جب نصف قطر کرہ کا لانہایت بڑا ہو

(۷) اگر ا اور س مقادیر مستقل رہیں اور طب پر خفیف سی زیادتی ہو تو ثابت کرو کہ

طا کم ہوگا اگر طس ربعہ سی بڑا ہو اور زیادہ ہوگا اگر طس ربعہ سے کم ہو

(۸) دو مثلث ا ب س اور اَ بَ سَ سب طرح سی برابر ہیں مگر ذرا مقام میں اختلاف کرتے ہیں تو ثابت کرو

جم ا ب ۔ جم ب س سَ جم س ا اُ + جم ا س سَ جم س ب بَ جم ب ا اَ = ۔

(۹) مثلث مستقیمۃ الاضلاع کی کونسی صور نپیر کی مماثلات سی اور کونسی صور ضابطہ کا س سے

ثابت ہوتی ہیں

(۱۰) صورت جم $\frac{طس}{۲}$ جم $\frac{ا + ب}{۲}$ = جب $\frac{س}{۲}$ جم $\frac{طا + طب}{۲}$ سی مثلث مستقیمۃ الاضلاع

کا رقبہ ارقام اضلاع اور ایک زاویہ میں دریافت کرو

(۱) باب چہارم کی ساتویں مثال سی کیا نتیجہ نکلے گا اگر نصف قطر زمین کو لا انتہا فرض کریں

باب دوازدہم

مجسم کثیر السطوح

(۱۳۲) مجسم کثیر السطوح یا کثیر القواعد وہ جسم ہی کہ اشکال مستقیمۃ الاضلاع سی گھرا ہوا اور ان مستقیمۃ الاضلاع کو اوسکی جہات کہتی ہیں ۔ مجسم کثیر القواعد کی جہات متشابہ اور کثیر الاضلاع منظم ہوتی ہیں اور زاوی مجسمہ اوسکی برابر ہوتی ہیں تو اوسکو مجسم منتظمہ السطوح کہتے ہیں

(۱۳۳) اگر مجسم کثیر القواعد ص تعداد زوایا مجسمہ کی ہو اور ف تعداد جہات کی اور ی اوسکی کناروں کی تعداد تو ص + ف = ی + ۲ کے ہوگا

کوئی نقطہ مجسم کثیر السطوح میں ایسا فرض کرو کہ وہ مرکز اوسکا ہو اور ایک کرہ مرتسم کرو جسکا نصف قطر نق ہو اور مرکز سی خطوط تمام سطوح کی کونوں میں ملاؤ اور جن نقطوں پر یہ خطوط سطح مستد

کرہ کو قطع کرین اون نقاطین قوسین دوائر عظیم کی وصل کرو تو سطح سطح مستدیر کرہ اتونہی کثیر الاضلاعون مین تقسیم ہوجاویگی جتنی کہ مجسم کثیر السطوح کے جہات ہین

فرض کرو کہ ان کثیر الاضلاعون مین کسی کثیر الاضلاع کی زاویون کا مجموعہ تو برابر ح کے ہے اور تعداد اضلاع کی م ہی تو بموجب دفعہ ۹۹ کی رقبہ کثیر الاضلاع کا یہہ ہوگا کہ نق^2 $\left\{ \text{ح} - (\text{م} - ۲)\text{ک} \right\}$

اور ان سب کثیر الاضلاعون کی رقبون کا مجموعہ برابر ہی سطح مستدیر کرہ کی یعنی ۴ ک نق^2

چونکہ کثیر الاضلاعون کا تعداد ف ہی تو اسی معلوم ہوا کہ

$$۴\text{ک} = \text{مس ح} - ۲\,\text{مس م} + ۲\,\text{ف ک}$$

اب مس ح تمام کثیر الاضلاعون کی زاویون کی مجموعہ کو تعبیر کرتا ہی اور اسیواسطی برابر ہے ۲ک × تعداد زوایائے مجسمہ یعنی ۲ک ص اور مس م برابر ہی تعداد اضلاع جملہ کثیر الاضلاعون کے یعنی ۲ ی کی چونکہ ہر کنارہ سی ایک قوس پیدا ہوتی ہی اور وہ مشترک دو کثیر الاضلاعون مین ہی اسیواسطے

$$۴\text{ک} = ۲\text{ک ص} - ۲\text{ک ی} + ۲\,\text{ف ک}$$

اسیواسطے $\text{ص} + \text{ف} = \text{ی} + ۲$

(۱۳۴) مجسمات کثیر السطوح منتظم صرف پانچ ہوسکتی ہین

فرض کرو کہ م تعداد اضلاع مجسم کثیر السطوح منتظم کی ایک جہت مین ہو اور ن تعداد مسطحہ زاویون کی ہر زاویہ مجسمہ مین ہو تو تمام زوایائے مسطحہ کی تعداد م ف سی یا ن ص سی یا ۲ ی سی تعبیر ہوگی پس

$$\text{م ف} = \text{ن ص} = ۲\,\text{ی} \quad \text{اور} \quad \text{ص} + \text{ف} = \text{ی} + ۲$$

ان مساوانون سی یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ص} = \frac{۴\,\text{م}}{۲(\text{م}+\text{ن}) - \text{م ن}} \quad \text{اور ی} = \frac{۲\,\text{م ن}}{۲(\text{م}+\text{ن}) - \text{م ن}} \quad \text{اور ف} = \frac{۴\,\text{ن}}{۲(\text{م}+\text{ن}) - \text{م ن}}$$

یہہ سب جملی چاہئی کہ صحیح اور مثبت ہون اسواسطی چاہئی ۲ (م + ن) بڑا بہ نسبت م ن کے ہو

اسیواسطی $\frac{1}{\text{م}} + \frac{1}{\text{ن}}$ بڑی بہ نسبت $\frac{1}{۲}$ کے ہو

لیکن ن کم ۳ سی نہیں ہوسکتا اسلئی $\frac{1}{\text{م}}$ بڑا $\frac{1}{۶}$ سی نہیں ہوسکتا اور اسیواسطے چاہئی کہ $\frac{1}{\text{م}}$ بڑا $\frac{1}{۶}$ سی ہو

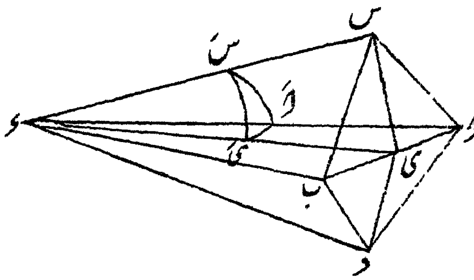
اور چونکہ م صحیح عدد ہی اور ۳ سی کم نہین ہو سکتا
پس جو قیمتین داخل ہونیکی قابل ہین وہ ۳ و ۴ و ۵ ہین — امتحان کرنی سی معلوم ہوگا کہ قیمتین م اورن کی جنسی تمام ضروری شرائط مساواتون کی پوری ہوتی ہین بہ تفصیل ذیل ہین اور ہر مجسم منتظم کثیر السطوح کا نام اوسکی جہات کی اعتبار سی رکہا گیا ہے

م	ن	ص	ی	ف	نام مجسم کثیر السطوح
۳	۳	۴	۶	۴	ذوا ربعۃ السطوح یا مخروط
۴	۳	۸	۱۲	۶	مکعب
۳	۴	۶	۱۲	۸	ذو ثمانی
۵	۳	۲۰	۳۰	۱۲	ذوا ثنا عشرہ السطوح
۳	۵	۱۲	۳۰	۲۰	مجسم ذوا لعشرین السطوح

یہہ بات بہی دیکہنی چاہی کہ ثبوت مین ایکبات زیادہ دعوی سی ثابت ہوگئی ہی کیونکہ دعوی مین یہہ بات نہین پائی گئی ہی کہ جہات متساوی الاضلاع اور متساوی الزوایا ہین اور سب برابر ہین حقیقت مین یہہ ثابت ہوا ہی کہ پانچ مجسم ایسی ہو سکتی ہین کہ اونکی جہات کی تعداد اضلاع اور تمام اوسکی مجسمہ زاویون مین تعداد زوایائی مسطحہ کی ایک ہی ہو

(۱۳۵) مجسم کثیر السطوح کی تمام مجسمہ زاویون کی مسطحہ زاویون کا مجموعہ برابر ہوتا ہے ۲ (ص - ۲) کہ اسواسطی کہ اگر مجسم کثیر القواعد کی کسی قاعدہ کی اضلاع کی تعداد کو م تعبیر کری تو اوس جہت کے داخلی زاویون کا مجموعہ (م - ۲) ق بموجب ۳۲ شم اقلیدس کی ہوگا اسی معلوم ہوا کہ مجموعہ تمام جہات کی داخلی زاویون کا
مت (م - ۲) ق یعنی مت م ق - ۲ ف ق ہی یعنی ۲ (ی - ف) ق یعنی ۲ (ص - ۲) ق ہی

(۱۳۶) مجسم کثیر السطوح کی دو متصل کی جہتون کا میلان دریافت کرو



فرض کرو کہ اب فصل مشترک دو متصل کی جہتوں کا ہی اور س اور د اونکی مرکز ہین — اب کی نقطہ ی پر تنصیف کرو اور ملاؤ س ی اور د ی تو س ی اور د ی عمود اب پر ہونگی اور زاویہ س ی د زاویہ میلان دو متصل کی جہتوں کا ہوگا اوسکو ہم ی سی تعبیر کرتی ہین — س ی اور د ی کی سطح مین س ر اور د ر عمود س ی اور د ی پر لگالو جو ر پر ملین اور مرکز ء کے گرد ایک کرہ بناؤ جو ءا و ءب ءس کو اَ و بَ و سَ پر ملے پس اَ سَ یَ مثلث کروی ہوگا — چونکہ اب عمود س ی اور د ی پر ہی تو وہ عمود سطح س ی د پر ہوگا اسیواسطے سطح ا ء ب جسمین اب ہی عمود سطح س ی د پر ہی ای معلوم ہوا کہ زاویہ سَ یَ اَ مثلث کروی کا ایک قائمہ ہی — فرض کرو کہ م تعداد اضلاع ہر جہت مین مجسم کثیر القواعد کی ہے اور ن تعداد سطحہ زاوں ہر مجسمہ زاویہ مین ہے تو

زاویہ اَ سَ یَ = ا س ی $= \frac{۲ک}{۲م} = \frac{ک}{م}$ اور ن برابر زاویون مین سی جو گرد ا کی بنین اونمین سی ایک زاویہ کا نصف زاویہ سَ اَ یَ ہے

یعنی سَ اَ یَ $= \frac{۲ک}{۲ن} = \frac{ک}{ن}$ مثلث قایم الزاویہ سَ اَ یَ مین

جم سَ اَ یَ = جم س ء ی جب اَ سَ یَ تو

یعنی جم $\frac{ک}{ن}$ = جم $\left(\frac{ک}{۲} - \frac{ی}{۲}\right)$ جب $\frac{ک}{م}$

اسیواسطے جب $\frac{ی}{۲} = \frac{\text{جم} \frac{ک}{ن}}{\text{جب} \frac{ک}{م}}$

(۱۳۷) مجسم کثیر القواعد مین جو کرہ اندر اور اوپر اوسکے بنایا جاے اونکی نصف قطر دریافت کرو

فرض کرو کہ کنارہ اب = طا اور د س = لق اور د ا = لق اور لق نصف قطر کرہ اندرونی کا اور لق نصف قطر کرہ بیرونی کا ہے تو

س ی = ا ی مم ا س ی = طا/۲ مم ک/م

لق = س ی مس س ی د = س ی مس ی/۲ = طا/۲ مم ک/م مس ی/۲

اور نیز لق = لق جم ا د س = لق مم ی س ا مم ی ا س = لق مم ک/م مم ک/ن

اسیواسطے لق = لق مس ک/م مس ک/ن = طا/۲ مس ی/۲ مس ک/م

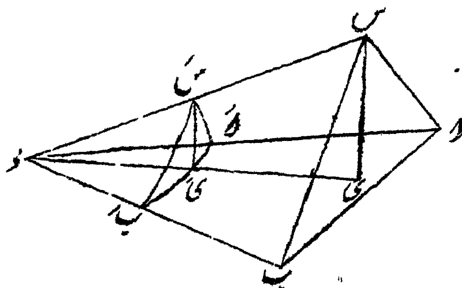
(۲۳۸) سطح اور جسامت مجسم کثیر القواعد منتظم کی دریافت کرو

کثیر القواعد کی ایک جہت کا رقبہ برابر م طا/۴ مم ک/م اور اسیواسطے سطح کثیر القواعد کی م ف طا/۴ مم ک/م ہے

اور نیز جسامت مخروط کی جسکی ایک جہت قاعدہ مجسم کثیر السطوح کا ہی اور راس ہے لق/۳ . م طا/۴ مم ک/م ہے

اور اسیواسطے جسامت مجسم کثیر السطوح کا م ف لق طا/۱۲ مم ک/م ہے

(۲۳۹) ایک مجسم متوازی السطوح کی جسامت اوسکی کناروں اور اوسکی میلان کے زاویوں مین دریافت کرو



فرض کرو کہ کنارہ د ا = طا اور د ب = طب اور د س = طس اور میلان کے زاویے ب د س = کا اور س د ا = ھ اور ا د ب = ط س ی عمود سطح ا د ب پر او سی نقطی پر ملتا ہوا نکالو د کی مرکز پر کرہ کھینچو جو د ا و د ب د س د ی سی نقاط ا و ب و س و ی ملتا ہوا کھنچے جسامت جسم متوازی السطوح برابر ہی حاصل ضرب اوسکی قاعدہ اور ارتفاع کی = طا طب جب ط س ی

= طا طب طس جب ط جب س د ی اور مثلث کروی س ا ی کا زاویہ ی قائمہ ہی پس

جب س د ی = جب س د ا جب س ا ی = جب ھ جب س ا ب

اور مثلث کروی س ا ب مین

جب س ا ب = $\frac{\sqrt{(1 - جم^2 کہ - جم^2 ھ - جم^2 ط + ۲ جم کہ جم ھ جم ط)}}{جب ھ جب ط}$

اسیواسطی جسامت جسم متوازی السطوح کی = طا طب طس $\sqrt{1 - جم^2 کہ - جم^2 ھ - جم^2 ط + ۲ جم کہ جم ھ جم ط}$

(۱۴۰) ×مجسم متوازی السطوح کا قطر اون تین کناروں کی رقموں مین دریافت کرو جنسی کہ قطر ملتا ہی اور میلان کی زاویوں کی رقموں مین جنپر وہ کنارہ آپسمین ملتی ہین دریافت کرو

فرض کرو کہ کناری ء ا = طا ء ب = طب ء س = طس اور میلان ب ء س = سہ و س ء ا = صہ و ا ء ب = لر اور ء د قطر مطلوب ہے اور ء ی قطر جہت ء ا ب کا ہے تو

ء $د^2$ = ء $ی^2$ + ی $د^2$ + ۲ ء ی . ی د جم س ء ی

= $طا^2$ + $طب^2$ + ۲ طا طب جم لر + $طس^2$ + ۲ س ء ی جم س ء ی

ایک کرہ مرکز ء پر کھینچو جو ء ا و ء ب و ء س و ء ی سی نقاط اَ و بَ و سَ و یَ پر ملے تو باب چہارم کے تمثال کے موافق

جم سَ ءَ یَ = $\frac{جم سَ ءَ بَ جب اَ ءَ یَ + جم سَ ءَ اَ جب بَ ءَ یَ}{جب اَ ءَ بَ}$

= $\frac{جم سہ جب اَ ء یَ + جم صہ جب بَ ء یَ}{جب لر}$

اسیواسطے ء $د^2$ = $طا^2$ + $طب^2$ + $طس^2$ + ۲ طا طب جم لر + ۲ طب طس جم سہ + ۲ طس طا جم صہ

(۱۴۱) جسامت ایک مخروط کی دریافت کرو

ایک مخروط چھٹا حصہ اوس مجسم متوازی السطوح کا ہوتا ہی جسکا ارتفاع برابر اور قاعدہ دو چند

مجسم ذواربعۃ السطوح سی ہوتا ہی - پس اگر کناری اور میلان معلوم ہین تو دفعہ ۱۳۹ مین جو جملہ جسامت کی لئی بیان کیا گیا ہی اوسکا چہٹا حصہ دریافت کرو - جسامت ذواربعۃ السطوح کی اوسکی چہون کنارون کی رقمون مین بہی بیان ہوسکتی ہی اسواسطی کہ دفعہ ۱۳۹ کی شکل مین ب س = طا و س ا = طب و ا ب = طس تو

جم سہ = (طب٢ + طس٢ − طا٢) / ٢ طب طس و جم صہ = (طس٢ + طا٢ − طب٢) / ٢ طس طا

جم لر = (طا٢ + طب٢ − طس٢) / ٢ طا طب

پس اگر یہہ قیمتین جم سہ اور جم صہ اور جم لر کی اوس جملہ مین جو دفعہ ۱۳۹ مین لکہا ہی درج کرین تو جسامت ذواربعۃ السطوح کی اوسکی کنارون کی رقمون مین دریافت ہوجائیگی نتایج مفصلۂ ذیل جسمین ج جسامت ذواربعۃ السطوح کو تعبیر کرتا ہے حاصل ہونگے

جس٢ − طا٢ طب٢ طس٢

+ طا٢ طا٢ (طب٢ + طس٢ − طا٢) + طب٢ طب٢ (طس٢ + طا٢ − طب٢) +

طس٢ طس٢ (طا٢ + طب٢ − طس٢) − طا٢ (طا٢ − طب٢) (طا٢ − طس٢)

− طب٢ (طب٢ − طس٢) (طب٢ − طا٢) − طس٢ (طس٢ − طا٢) (طس٢ − طب٢)

(۱۴۲) اگر راس مجسم ذواربعۃ السطوح کا سطح قاعدہ مین واقع ہو تو جسامت معدوم ہوجایگی پس اگر مساوات بالا کی جانب چپ کو برابر صفر کی لکہدین تو اوسی تعلق اون چہہ خطون کا حاصل ہوگا جو کسی سطح مین جہان چاہین چار نقطی لیکر وصل کرین

سوا اسکی ایک ترکیب کارنٹ صاحب کی ہی اوسی جسامت مجسم ذواربعۃ السطوح کی بہی لکاؤ نکلتی ہین اب ہم اوسکو بتلائینگے اور جو اور زیادہ تحقیقات کارنٹ صاحب نی لکہی ہی اوسکو بہی لکہینگے

ارقام لکہنی کی ترکیب کو بدلنا سطح آسان ہی کہ جن حرفون پر زیر لگی ہوئی ہین اونکو بی زیر زبر حرفون سی بدل دین

(۱۴۳) کسی سطح مین جہان چاہین چار نقطی لین اور اونمین جہہ خطوط وصل کرین تو اونمین جو باہم ارتباط ہوا اوسی دریافت کرو

فرض کرو کہ ا و ب و س د چار نقطی ہون اور اب = طس اور ب س = طا اور س ا = طب اور نیز دا = طا اور د ب = طب اور د س = طس

اگر مثلث ا ب س کی اندر د واقع ہوتا ہی تو مجموعہ زاویون ا د ب اور ب د س اور س د ا کا برابر چار قائمون کی ہی پس جم ا د ب = جم (ب د س + س د ا)

تقلیب وتحلیل سی ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا = جم^2 ا د ب + جم^2 ب د س + جم^2 س د ا − ۲ جم ا د ب جم ب د س جم س د ا

اگر د باہر مثلث ا ب س سی واقع ہوتا ہی تو س زاوئی نقطہ د پر برابر باقی دو زاویون کے مجموعہ کے ہوگی اور جو نتیجہ ابہی لکہا ہی وہی قایم رہیگا

اب جم ا د ب = $\frac{\text{طا}^2 + \text{طب}^2 - \text{طس}^2}{۲\ \text{طا طب}}$

اور جیب التمامین بہی اسیطرح تعبیر ہوسکتی ہین ان قیمتون کو اوپر کی مساوات مین درج کرین تو ہم کو ارتباط مطلوب حاصل ہوجایگا اور اوسکا اختصار ہوکر یہہ صورت حاصل ہوگی

. = − طا^2 طب^2 طس^2

+ طا^2 طا^2 (طب^2 + طس^2 − طا^2) + طب^2 طب^2 (طس^2 + طا^2 − طب^2) + طس^2 طس^2 (طا^2 + طب^2 − طس^2)

− طا^2 (طا^2 − طب^2) (طا^2 − طس^2) − طب^2 (طب^2 − طس^2) (طب^2 − طا^2) − طس^2 (طس^2 − طا^2) (طس^2 − طب^2)

(۱۴۴) مجسم ذوالاربعۃ السطوح کی حجت اوسکی چہہ کنارون کی قیمتون مین دریافت کرو

فرض کرو کہ مثلث ا ب س ایک جہت یا قاعدہ مجسم ذوالاربعۃ السطوح کا ہی اور اوسکی اضلاع کی طول طا طب طس ہین اور طا و طب و طس طول اون خطوط کے ہین جو راس سی اور ا و ب و س مین ملائی جائین

اور ع طول اوس عمود کا ہی جو راس سی قاعدہ پر لٹکایا جائی تو طول اون خطوط کا جو موقع عمود اور ا و ب و س مین ملائی جائین یہہ ہوگا کہ $\sqrt{\text{طا}^2 - \text{ع}^2}$ و $\sqrt{\text{طب}^2 - \text{ع}^2}$ و $\sqrt{\text{طس}^2 - \text{ع}^2}$

بس جو ارتباط دفعہ ۱۴۳ مین قایم ہوا ہی وہی قایم رہی گا اگر بجای طا کے

$\sqrt{}$ طا^2 − ع^2 اور طب کی بجای $\sqrt{}$ طب^2 − ع^2 اور طس کی بجای $\sqrt{}$ طس^2 − ع^2 مندرج کرین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ع^2 (۲طا^{2}طب^2 + ۲طب^{2}طس^2 + ۲طس^{2}طب^2 − طا^4 − طب^4 − طس^4) = − طا^{2}طب^{2}طس^2

+ طا^{2}طا^2 (طب^2 + طس^2 − طا^2) + طب^{2}طب^2 (طس^2 + طا^2 − طب^2) + طس^{2}طس^2 (طا^2 + طب^2 − طس^2)

− طا^2 (طا^2 − طب^2)(طا^2 − طس^2) − طب^2 (طب^2 − طس^2)(طب^2 − طا^2) − طس^2 (طس^2 − طا^2)(طس^2 − طب^2)

− ع^2 کا سولہ گنا مثلث ا ب س کی مجذور کا ہی لیس جانب راست ۱۴۴ حس^2 ہی جسمین جس مجسم ذوار بعۃ السطوح کو تعبیر کرتا ہی۔ بس جملہ مطلوب حاصل ہوگیا

(۱۴۵) اگر ایک کرہ کی سطح مستدیر پر جہان جاہین چار نقطی فرض کرکی اون کی درمیان چہہ قوسین دوایر عظیم کے وصل کرین تو بتاؤ اونکی درمیان کیا ارتباط ہوگا

فرض کرو کہ ا و ب و س و د چار نقطی ہین اور ا ب = طا اور ب س = کہ اور س ا = ہ

اور د ا = کہَ اور د ب = ہَ اور د س = طَ

موافق دفعہ ۱۴۳ کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ا = جم^2 ا د ب + جم^2 ب د س + جم^2 س د ا − جم ا د ب جم ب د س جم س د ا

اب جم ا د ب = $\dfrac{\text{جم طا − جم کہَ جم ہَ}}{\text{جیب کہَ جیب ہَ}}$

اور جیب التمام ہی اسیطرح تعبیر ہو سکتی ہین پس اگر ہم ان قیمتون کو اوپر کے نتیجی مین رکہین تو ہم کو ارتباط مطلوب بعد اختصار یہہ حاصل ہوگا کہ

ا = جم^2 کہ + جم^2 ہ + جم^2 طا + جم^2 کہَ + جم^2 ہَ + جم^2 طَ

− جم^2 کہ جم^2 کہَ − جم^2 ہ جم^2 ہَ − جم^2 طا جم^2 طَ

− ۲ (جم کہ جم ہ جم طا + جم کہ جم ہَ جم طَ

+ جم ہ جم کہَ جم طَ + جم طا جم کہَ جم ہَ)

+ ۲ (جم کہ جم ہ جم کہَ جم ہَ + جم ہ جم طا جم ہَ جم طَ)

+ جم طا جم کہ جم طا جم کہ)

(۱۴۶) مجسم ذوار بعۃ السطوح پر جو کرہ بنایا جائے اوسکا نصف قطر دریافت کرو

دفعہ ۱۴۴ کے موافق مجسم ذوار بعۃ السطوح کے کنارون کو تعبیر کرو

اور فرض کرو کہ کرہ مجسم مذکور پر بنایا گیا اور اوسکی کونون کی اندر چہہ قوسین دوائر عظیم کے وصل کی گئین — تو جو ارتباط دفعہ ۱۴۵ مین ان چہہ قوسون کے درمیان بیان کیا گیا ہی وہ یہان بھی صادق اویگا اور فرض کرو کہ لق نصف قطر کو تعبیر کرتا ہے تو

جم کہ = ۱ − ۲ جب² طا/۲ = ۱ − (طا/۲لق)² = ۱ − طا²/۲لق²

اور جیب التما مین بھی اسیطرح تعبیر ہو سکتی ہین ان قیمتون کو دفعہ ۱۴۵ کی نتیجہ مین رکھو تو دفعہ ۱۴۴ کی استعانت سی ہم کو یہہ نتیجہ مطلوب بعد مختصر کرنے کے حاصل ہوگا کہ

۱۴۴×۴ جس² لق² = ۲ طا² طب² طا'² طب'² + ۲ طب² طس² طب'² طس'² + ۲ طا² طس² طس'² طا'²
− طا⁴ طا'⁴ − طب⁴ طب'⁴ − طس⁴ طس'⁴

اس مساوات کی جانب راست کی تحلیل اجزاء ضربی مین ہو سکتی ہی اور اگر ہم اسوقت اوس ترکیب کو کام مین لائین جو رقبہ مثلث کی بیان کرنی مین کام مین لائی تھی تو طا طا' + طب طب' + طس طس' = ۲ق فرض کرنے سے ہم کو یہہ حاصل ہوگا کہ ۳۶ جس² لق² = ق(ق − طا طا') (ق − طب طب') (ق − طس طس')

مثالین

(۱) اگر مجسم کثیر القواعد کی دو متصل کی جہات کا میلان ی سی تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ ذوار بعۃ القواعد مین جم ی = ⅓ اور مکعب مین = ۰

اور دو ثمانی القواعد مین = −⅓ اور دو اثنا عشرہ القواعد مین = −⅕√۵ اور دو عشرین القواعد = −⅓√۵

(۲) دفعہ ۱۳۶ مین جو رقمین لکھی گئی ہین اوسیطرح ثابت کرو کہ نصف قطر کرہ کا جو مجسم منتظم کی ہے جو ... اور تمام متصل کے جہات ... وہ کو مس کرتا ہے برابر ہے ½ طا جم کہ ...

(۳) مجسم ذوا ربعۃ القواعد منتظم کی ایک جیب اور باقی جہات خارج شدہ کو ایک کرہ مس کرتا ہی اوسکا نصف قطر دریافت کرو

(۴) مجسم ذوا ربعۃ القواعد منتظم کی اندر اور باہر کری بنائی گئی ہین اور اونکی نصف قطر ا اور ب ہین تو ثابت کرو کہ ب = ۳ ا

(۵) مجسم منتظم ذوا ربعۃ القواعد مین ایک کرہ بنایا گیا ہی جسکا نصف قطر ا ہی اور ل ق نصف قطر اوس کرہ کا ہی جو کنارون کو مس کرتا ہی تو ثابت کرو کہ ل ق^۲ = ۳ ا^۲

(۶) مجسم منتظم ذوا ربعۃ القواعد مین ایک کرہ بنایا جاے اور اوسکا نصف قطر ا ہو اور ل ق نصف قطر اوس کرہ کا ہو جو اوس مجسم کی ایک جہت کی اور باقی جہات خارج شدہ کو مس کری تو ثابت کرو کہ ل ق = ۲ ا

(۷) اگر ایک مکعب اور ذی ثمانی عشرہ القواعد کرہ معلوم مین بنائی جائین تو ان دونو مجسمون پر جو کرہ بنایا جایگا وہ ایک ہی ہوگا اور عکس ثابت کرو

(۸) اگر ذی اثنی عشر القواعد اور ذو العشرین القواعد ایک کرہ معلوم پر بنائی جائین تو جو کرہ اون دونون پر بنائی جائینگے ایک ہی ہونگی اور عکس اسکا ثابت کرو

(۹) ایک مجسم منتظم ذوا ربعۃ القواعد اور دوسرا مجسم منتظم ذی ثمانی القواعد ایک ہی کرہ کی اندر بنائی جائین تو ان دونو مجسمون مین جو کری بنائی جائینگی اونکی نسبت بتلاؤ

(۱۰) مجسم متوازی السطوح کی چارون قطرون کی مربعی ملکر جو چند کنارون کی مربعون کے مجموعی کے مساوی ہوتے ہین

(۱۱) اگر مجسم متوازی السطوح کی کونون کی نقطون کو مرکز مقرر کرکے برابر کری کھینچین تو جو حصے جسم کے ان کرون مین آئینگے اونکا مجموعہ برابر کسی ایک کرہ کی جسامت کے ہوگا

(۱۲) ایک مکعب مین مجسم ذی ثمانی القواعد کھینچا گیا ہی اسطرح کہ ذی ثمانی القواعد کی کونون کے نقطی مرکز جہات مکعب کی ہین تو ثابت کرو کہ مکعب کی جسامت چہہ گنی مجسم ذی ثمانی القواعد کی جسامت سے ہوگی

(۱۳) یہہ ممکن نہین ہی کہ کسی حیز کو ایک قسم کے مجسمات منتظم کثیر السطوح بالکل پر کردین الا مکعب مگر یہہ بہ حسب ہوگا کہ ذوا ربعۃ القواعد اور ذی ثمانی القواعد کہ جنکی جہات مساوی ہین استعمال کیجاے

اور ایک بہ نسبت دوسرے کے دو چند لئے جائیں

(۱۴) ایک کرہ کا قطر قط ہی اوسکی سطح مستدیر پر مثلث کروی بنایا گیا ہی اور اوسکی کونون کی نقطون مین اوران نقطون اور مرکز مین خطوط ملائی گئی ہین تو جو مخروط اسطرح پیدا ہوگا تو ثابت کرو کہ حساب اونکی یہہ ہوگی

۱/۲ قط۳ (مس لق مس لق۱ مس لق۲ مس لق۳)

یہان لق اور لق۱ اور لق۲ اور لق۳ نصف قطر دائرہ اندروتی اور دوائر خارجی کے ہین

(۱۵) ایک کرہ کا نصف قطر لق ہی اور اوسمین مجسم منتظم ذوار بعۃ القواعد بنایا گیا ہی اور اوسکی کونون کے نقطی قطب بنائی گئی اور چار دوائر صغیرہ کہنچی گئی ہین اسطرح سی کہ ہر ایک دائرہ تین دائرون کو مس کرتا ہے تو ثابت کرو کہ رقبہ سطح مستدیر کا جو سطح پر دائرہ سی احاطہ کی جائیگی برابر ہوگی ۲ط لق۲ (۱ — ۱/۳)

(۱۶) مثلث کروی اب س مین ی کوئی سا نقطہ ہی تو حاصل ضرب کوئی سے دو ضلعون کی جیبون اور اونکے زاویہ درمیانی کی جیب کا =

جب ای جب ب ی جب س ی { مم ای جب ب ای س + مم ب ی جب س ی ا + مم س ی جب ای ب }

باب سیزدہم مسائل متفرقہ

(۱۴۷) ایک کرہ کی دائرہ صغیرہ کی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ ی قطب دائرہ خورد کا ہی اور ص نقطہ معین کرہ پر ہی اور ص لا ایک دائرہ عظیم معین ہے فرض کرو کہ ی ص = کہ اور ی ص لا = ہ وہ مقام نقطہ ی کا بوساطت ان قوسی محدد اور معین کہ اور ہ کی دریافت ہوتا ہی اور ق کوئی نقطہ محیط دائرہ صغیرہ کا ہی اور ق ص = ر اور ق ص لا = د پس د اور ر معین اور محدد نقطہ ق کی ہین اور ی ق = لق تو مثلث ی ص ق مین

جم لق = جم کہ جم ر + جب کہ جب ر جم (د — ر) . . . (۱)

محیط دائرہ مین کوئی سا نقطہ ہو تو اوسکی قوسی محدد اور معین کی تعلق اس مساوات سی تعبیر ہوتے ہین

اگر دائرہ دائرہ عظیم ہو تو لق = ط/۲ ہوگا اور یہہ مساوات ہوگی کہ

۰ = جم کہ جم ر + جب کہ جب ر جم (د — ر) . . . (۲)

یہہ بات خیال کی قابل ہی کہ قوسی محدد اور معین یہان جو کام مین لائی ہین وہ مماثل طول اور عرض بلد کی ہین جنسی کہ روی زمین پر مقام کسی جگہہ کا دریافت ہوتا ہی اور تمامی عرض کی اور تمامی طول کی ہین

(۱۴۸) اون کروی مثلثون کے راسون کا مقام التقاط دریافت کرو جسکا قاعدہ اور رقبہ معلوم ہے

فرض کرو کہ اب قاعدہ معلوم = طس اور اس = ر اور ب اس = د

چونکہ رقبہ معلوم ہی اسلئی کروی زیادتی معلوم ہی اوسکو ز سی تعبیر کرو تو بموجب دفعہ ۱۰۳ کے

مم ½ ز = مم ½ ر مم ½ طس قم ط + مم ط

اسیواسطے جب (ط - ½ ز) = مم ½ ر مم ½ طس جب ½ ز

اسیواسطے ۲ مم ½ طس جب ½ ز جم ۲ ½ = جب ر جب (د - ½ ز)

اسیواسطے جم ر جم ½ طس جب ½ ز + جب ر جم (د - ½ ز + ک/۲) = - مم ½ طس جب ½ ز

اگر اس مساوات اور دفعہ گذشتہ کی مساوات کا مقابلہ کرین تو معلوم ہوگا کہ مقام نقاط مطلوب دائرہ ہے

اگر کہ اور ہ کو ہم محدد اور معین اوسکی قطب کے خیال کرین تو

$$\text{مس کہ} = \frac{1}{\text{مم } \tfrac{1}{2}\,\text{طس جب } \tfrac{1}{2}\,\text{ز}} = \frac{\text{مس } \tfrac{1}{2}\,\text{طس}}{\text{جب } \tfrac{1}{2}\,\text{ز}}$$

$$\text{ہ} = \tfrac{1}{2}\,\text{ز} - \tfrac{\text{ک}}{2}$$

قرینہ سی یہہ گمان ہوتا ہی کہ قطب اس دائرہ کا اوس دائرہ عظیمہ مین ہی جو اب کو قائمی زاویون پر تنصیف کرتا ہی اور یہہ گمان آسانی سی ثابت ہوسکتا ہی اسواسطی کہ مساوات دائرہ عظیمہ کی

= جم ر جم (ک/۲ - طس/۲) + جب ر جب (ک/۲ - طس/۲) جم (د - کہ)

اور یہہ قیمتین کہ ر = کہ اور د = ہ شرائط مساوات کو پوری کرتی ہین

(۱۴۹) ایک مثلث کی اندر اور اوسپر دائری بنائی گئی ہین اونکی قطبون کی درمیان کا بعد قوسی دریافت کرو

فرض کرو کہ ق قطب دائرہ اندرونی کا اور ع قطب دائرہ بیرونی مثلث اب س کا ہے

تو بموجب دفعہ ۸۹ کی ق اب = ½ ا اور بموجب دفعہ ۹۲ ع اب = ص - س اسی معلوم ہوتا ہے کہ

کہ جم ق اع = جم ½ (ب ~ س) اور

جم ق ع = جم ق ا جم ع ا + جب ق ا جب ع ا جم ½ (ب − س)

شکل دفعہ ۸۹ کی دیکھو تو بموجب دفعہ ۶۲ کے

جم ق ا = جم ق ی جم ا ی = جم لق جم (م − لق)

جب ق ا = جب ق ی / جب ق ا ی = جب لق / جب ½ ا

پس جم ق ع = جم لص جم لق جم (م − لق) + جب لص جب لق جم ½ (ب − س) قم ½ ا

اسیواسطے بموجب دفعہ ۹۵ کے

جم ق ع = جم لص جم لق جم (م − طا) + جب لص جب لق جب ½ (طب + طس) قم ½ طا

اب مم لق = جب م / ن اور مس لص = ۲ جب ½ طا جب ½ طب جب ½ طس / ن

اسیواسطے جم ق ع / جم لص جم لق = ½ { جب م جم (م − طا) + ۲ جب ½ (طب + طس) جب ½ طب جب ½ طس }

= ۱/۲ن (جب طا + جب طب + جب طس)

اسی معلوم ہوا [جم ق ع / جم لص جب لق]² − ۱ = ۱/۴ن² (جب طا + جب طب + جب طس)² − ۱

= (مم لق + مس لص)² بموجب دفعہ ۹۴

اسیواسطے جم² ق ع = جم² لص جب² لق + جم² (لص − لق)

اور جب² ق ع = جب² (لص − لق) − جم² لص لق

(۱۵۰) مثلث کی دائرہ اندرونی اور دائرہ خارجی کی قطبوں کا بُعد قوسی دریافت کرو

فرض کرو کہ ق قطب دائرہ بیرونی کا اور ق۱ قطب دائرہ خارجی کا ہی جو زاویہ ا کی مقابل کھنچا جاے تو یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ ق ب ق۱ = ½ ک − ½ (س − ا) اور

جم ق ق۱ = جم لص جم لق۱ جم (م − طس) − جب لص جب لق۱ جب ½ (س − ا) قط ½ ب

= جم لص جم لق۱ جم (م − طس) − جب لص جب لق۱ جب ½ (طس − طا) قط ½ طب

اسیواسطے جم ق ق۱ / جب لق۱ جب لص = مم لق۱ جم (م − طس) − مس لص جب ½ (طس − طا) قم ½ طب

دفعہ سابق کی طرح اختصار کرنی سی مساوات اخر کی جانب راست کا رکن یہہ ہوگا

$\frac{1}{2}$ ن ۰ (جب طب + جب طس − جب طا)

اسی معلوم ہوا کہ $\frac{(\text{جم ق ق}_1)^2}{(\text{جم لص جب لق}_1)}$ − ۱ = (مس لص − مم لق$_1$)^2 بموجب دفعہ ۹۴ کے

اسیواسطے جم^2 ق ق$_1$ = جم^2 لص جب^2 لق$_1$ + جم^2 (لص + لق$_1$)

اور جب^2 ق ق$_1$ = جب^2 (لص + لق$_1$) − جم^2 لص جب^2 لق$_1$

(۱۵۱) ایک قاعدہ معلوم ہی اوسکی اضلاع کے نقاط وسطی میں جو قوس گذرتی ہی وہ قاعدہ خارج شدہ سے اوس نقطہ معین پر گذریگی جسکا فاصلہ قاعدہ کی نقطہ وسطی سی ربعہ دائرہ ہے

فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہی اور ا س کا نقطہ وسطی ی ہی اور ف نقطہ وسط ا ب کا ہی اور قوس جو نقاط ی اور ف پر گذرتی ہی خارج ہونی سی قاعدہ خارج شدہ سی نقطہ ق پر ملتی ہی تو

$\frac{\text{جب ب ق}}{\text{جب ب ف}} = \frac{\text{جب ب ف ق}}{\text{جب ب ق ف}}$ اور $\frac{\text{جب ا ق}}{\text{جب ا ف}} = \frac{\text{جب ا ف ق}}{\text{جب ا ق ف}}$

اسیواسطے $\frac{\text{جب ب ق}}{\text{جب ا ق}} = \frac{\text{جب ا ق ف}}{\text{جب ب ق ف}}$

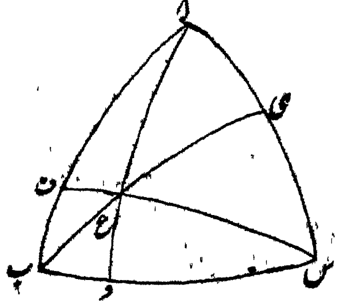
اور اسیطرح $\frac{\text{جب س ق}}{\text{جب ا ق}} = \frac{\text{جب ا ق ی}}{\text{جب س ق ی}}$

اسیواسطے جب ب ق = جب س ق اسیواسطے ب ق + س ق = ک

اسی معلوم ہوا کہ اگر د نقطہ وسط ب س کا ہو تو

د ق = $\frac{1}{2}$ (ب ق + س ق) = $\frac{1}{2}$ ک

(۱۵۲) اگر مثلث کروی کی کونون کی نقطوں سی تین قوسین کسی نقطہ تک ایسی کہنچ جائیں کہ وہ مقابل کے اضلاع سی ملین تو حاصل ضرب اضلاع کی حصص علی التبادل کی جوب کے اپس میں برابر ہونگے



فرض کرو کہ ق کوئی نقطہ ہی اور زاویون ا ب و س سی قوسین کہنچی گئی ہین جو نقطہ ق پر گذرتی ہیں اور مقابل کی اضلاع کو د اور ی اور ف پر قطع کرتی ہین تو

$$\frac{\text{جب ب د}}{\text{جب ب ق}} = \frac{\text{جب ب ق د}}{\text{جب ب د ق}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جب س د}}{\text{جب س ق}} = \frac{\text{جب س ق د}}{\text{جب س د ق}}$$

اسیواسطے

$$\frac{\text{جب ب د}}{\text{جب س د}} = \frac{\text{جب ب ق د جب ب ق}}{\text{جب س ق د جب س ق}}$$

اور اسیطرح کی جملی بیانیہ $\frac{\text{جب س ی}}{\text{جب ا ی}}$ اور $\frac{\text{جب ا ق}}{\text{جب ب ق}}$ کے واسطے حاصل ہوسکتے ہیں اور اسی یہہ ظاہر نتیجہ پیدا ہوتا ہے کہ

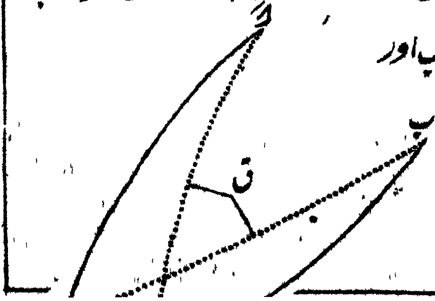
$$\frac{\text{جب ب د}}{\text{جب س د}} \cdot \frac{\text{جب س ی جب ا ف}}{\text{جب ا ی جب ب ف}} = ۱$$

اسیواسطے جب ب د جب س ی جب ا ف = جب س د جب ا ی جب ب ف

(۱۵۳) اگر بالعکس اسکی نقاط د اور ی اور ف اضلاع مثلث ہون اور دفعہ بالا مین جو تعلق حصص کا بیان کیا گیا ہے مانا جاوی تو قوسین جو ان نقاط اور مقابل کی زاویون پر گذرینگے وہ ایک نقطہ مشترکہ پر ملاقی ہونگین

پس اس معلوم ہوا کہ اشکال مفصلہ ذیل ثابت ہین — عمود جو مثلث کی کونون کی نقطون سی مقابل کی اضلاع پر لگائی جائیں ایک نقطہ پر ملینگے — اور خطوط جو مثلث کروی کی زاویون کی نصف کرتی ہین ایک نقطہ پر ملینگے — اور خطوط جو نقاط وسط اضلاع اور مقابل کی زاویون ہین ملائی جاتی ہین ایک نقطہ پر ملینگے — مثلث کی اضلاع کو جن نقطون پر دائرہ اندرونی مس کرتا ہی اون نقطون اور مقابل کے زاویونمین خطوط ملائی گئی ایک نقطہ پر ملینگے

(۱۵۴) اگر اب اور اَبَ دو برابر قوسین ہون اور قوسین اا اور ب بَ تنصیف قائمی زاویون پر اون قوسون کے کیجائین جو نقطہ ق پر ملتی ہین تو اب اور اَبَ کی محاذی نقطہ ق پر برابر زاویہ ہونگے



اسواسطی کہ ق د = ق اَ اور ق ب = ق بَ اسی معلوم ہوا کہ مثلث ق ا ب کی ضلع موافق اپنی
اپنی نظیر کی برابر اضلاع ق اَ بَ کی ہین اسیواسطی زاویہ ا ق ب = اَ ق بَ

یہہ ساد ی شکل اوسوقت ٹہیک کام اتی ہی کہ ایک سخت جسم جسکا ایک نقطہ قائم ہو حرکت کری اسواسطی کہ اگر
کرہ قابل حرکت ہو اور اپنی مرکز کی گرد حرکت کرتا ہوا اور یہہ مرکز قایم ہو تو اس شکل سی یہہ ظاہر ہوتا ہے
کہ کوئی سی دو نقطی قائم ا اور ب ایک اور مقام اَ اور بَ پر اوس حرکت کرہ سی اسکتی ہین جو وہ
اپنی محور پر کہ مرکز اور کسی نقطہ خاص پر گذرتا ہی کری اسی یہہ نتیجہ نکل سکتا ہی کہ سخت جسم مین جسکا ایک
نقطہ قایم ہو تبدیل مقام ہو سکتا ہی اگر اوسکو گرد محور کی جو نقطہ معین پر گذرتا ہی چکر دین

(۱۵۵) فرض کرو کہ ق کوئی نقطہ زاویہ مسطحہ ا د ب کی درمیان ہی اور نقطہ ق سی عمود خطوط د ا اور د ب
پر کہینچو تو یہہ ظاہر ہی کہ زاویہ جو ان عمودوں کے درمیان واقع ہوگا تکملہ زاویہ ا د ب کا ہوگا — یہی کیفیت
زاویہ مجسمہ مین ہی وہ لکہنی کی لائق ہی فرض کرو کہ ایک زاویہ مجسمہ تین مسطحہ زاویوں سے
نقطہ د پر بنتا ہی اور زاویہ مجسمہ کے درمیان کسی نقطہ ق سی عمود ق ل اور ق م اور ق ن اون تین
سطحوں پر جنسی کہ زاویہ مجسمہ بنتا ہی نکالو تو مثلث کروی جو مطابق تین سطحوں ل ق م اور ل ق ن
اور ن ق ل کی بنتا ہی قطبی مثلث اوس مثلث کروی کا ہی جو مطابق زاویہ مجسمہ د کے بنتا ہی —
پروفیسر ڈی مورگن نی یہہ بات نکالی ہے

(۱۵۶) مجسمات کثیر السطوح دفعہ ۱۳۲ کا نتیجہ اول یولر کو سوجہا تہا اور جو ثبوت اوسکا لکہا وہ لیجنڈر صاحب کا ہے
ثبوت سی واضح ہوتا ہی کہ نتیجہ بہت سی ایسی صورتوں مین جنمین کہ مجسمات کثیر السطوح کی زاویی مجسمہ
خارجی بہی ہون صحیح ہی اسواسطی کہ جو بات ثبوت کی لئی ضروری ہی وہ فقط اتنی ہی کہ مجسم کے اندر ایک نقطہ
ایسا لیا جاسکی کہ وہ مرکز کرہ کا ہو اور کثیر الاضلاعین جو دفعہ ۱۳۲ کی موافق بنائیں جائیں اونکی کچہ
بہی حصی آپسمین منطبق نہ ہون — اب ہم ایک اور ثبوت لکہینگے اور پہر اس نتیجہ سی اور بڑی بڑی نتیجے
استنباط کرینگے — ہم ایک اول ایک ضابطہ لکہتی ہین جو کاچی صاحب نے ایجاد کیا ہے

(۱۵۷) فرض کرو کہ جال کی طرح اشکال مستقیمہ الاضلاع ہون اور یہہ ضرور نہین کہ وہ سب ایک ہی

سطح مین ہون لیکن وہ سب ملکر کسی سطح کو چارون طرف سی نہ گہرتی ہون اور ی تعداد کنارون کی ہو اور ف تعداد شکلون کی اور ص تعداد کونون کی نقطون کی تو ف + ص = ی + ۱

اگر سطح مستوے ایک ہی ہو تو یہہ شکل ظاہر ہی کہ ف = ۱ اور ص = ی

مگر استقرا ریاضیہ سی وہ کلیتا صحیح ثابت ہو سکتی ہی اسواسطے کہ فرض کرو کہ یہہ ضابطہ ف شکلون کے جال کیواسطے صحیح ہی اور اس جال پر ایک مستقیمۃ الاضلاع ن ضلعون کی زیادہ کی گئی ہی تو جال او شکل زیادہ کی گئی کے م اضلاع منطبق ہین اور اسیواسطے م + ۱ کونون کی نقطے ہین اور نئی جال کی نسبت یہہ فرض کرو کہ جو اشیا پہلے جال مین ی اور ف اور ص سی تعبیر ہوتی تہین وہ اسمین یَ اور فَ اور صَ سی تعبیر ہوتے ہین

یَ = ی + ن − م اور فَ = ف + ۱

صَ = ص + ن − (م + ۱)

اسیواسطے فَ + صَ − یَ = ف + ص − ی

لیکن ف + ص = ی + ۱ بموجب فرض کے اسیواسطے

فَ + صَ = یَ + ۱

(۱۵۸) یولر کے ضابطہ کی ثابت کرنی کی لئی ہم فرض کرتی ہین کہ مجسم کثیر السطوح کی ایک جہت قطع کردی گئی تو اس سبب سی ایک جال اشکال مستقیمۃ الاضلاع کا بنجائیگا جسپر ضابطہ کا جو صاف کا صادق آئیگا

اور ف − ۱ + ص = ی + ۱

اسیواسطے ف + ص = ی + ۲

(۱۵۹) مجسم کثیر السطوح مین جہات جنکے اضلاع طاق ہون تعداد مین زوج ہوتی ہین اور زاویہ مجسم جو طاق سطوح سی بنتی ہین تعداد مین زوج ہوتی ہین

فرض کرو کہ ا و ب و س وغیرہ تعداد اون جہات کی ہی جو مثلث اور ذوار بعۃ الاضلاع مخمس مسدس وغیرہ ہین اور کہ ا اور صہ اور طا اور ر وغیرہ تعداد زوایا مجسمہ کی جو تین چار پانچ چہہ وغیر سطوح سے بنتے ہین تو کنارہ دو جہتون سی متعلق ہی اور دو مسطح زاویون پر منتہی ہوتا ہے اسیواسطے

۲ی = ۳ا + ۴ب + ۵س + ۶ر + ...

۲ی = ۳ک + ۴ھ + ۵ط + ۶ر + ...

ان ارتباطات سی یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ ا + س + ی + . . . اور ک + ط + ر. جفت اعداد ہیں

(۱۶۰) دفعہ سابق میں جو مقادیر جن رقموں سی تعبیر کی گئی نہیں وہی رہتی دو تو

ف = ا + ب + س + د + ...

ص = ک + ھ + ط + ر + ...

ان کو پہلی نتایج کی ساتھہ ملائیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲ی − ۳ف = ب + ۲س + ۳د + ...

۲ی − ۳ص = ھ + ۲ط + ۳ر + ...

پس ۲ی کم ۳ف سی یا ۳ص سی نہیں ہو سکتا

(۱۶۱) جملی جو ی اور ف اور ص کی واسطی اوپر کی دو دفعات میں بیان کی گئی ہیں اگر اس نتیجہ کی ساتھہ ۲ف + ۲ص = ۴ + ۲ی ملائی جائیں تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۲(ا + ب + س + د + . .) + ۲(ک + ھ + ط + ر + . . .) = ۴ + ۳ا + ۴ب + ۵س + ۶د + . .

اسیواسطے ۲(ا + ب + س + د + . .) + ۲(ک + ھ + ط + ر + . . .) = ۴ + ۳ک + ۴ھ + ۵ط + ۶ر + . .

اسیواسطے ۲(ک + ھ + ط + ر + . . .) − (ا + ۲ب + ۳س + ۴د + . . .) = ۴ . . . (۱)

۲(ا + ب + س + د . . .) − (ک + ۲ھ + ۳ط + ۴ر + . .) = ۴ . . . (۲)

اسیواسطے جمع کرنے سے

ا + ک − (س + ط) − ۲(د + ر) − ۳(ی + ر) − . . . = ۸

پس اسی ثابت ہوکہ مثلثی جہات کی تعداد مع تعداد زوایاء مجسم کی جو ان تین سطحوں سی بنتی ہیں ۸ سی کم نہیں ہو سکتے

پھر مساوات (۱) اور (۲) سی ک کے محو کرنے سی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

۳ا + ۲ب + س − ی − ۲ف − . . . − ۲ھ − ۴ط − . . . = ۱۲

۳ا + ۲ب + س کم ۱۲ سی نہین ہو سکتی اس نتیجہ سی بہت سی اور نتایج مستنبط ہو سکتی ہین
مثلاً ایک مجسم نہین بن سکتا جنکی جہات مثلث اور ذوار بعۃ الاضلاع یا مخمس نہین ہین
اور اسیطرح ثابت کر سکتی ہین کہ ۳ک + ۲ہ + ط کم ۱۲ سے نہین ہو سکتی

(۱۶۲) پاین سوٹ نی ثابت کیا ہی کہ علاوہ اون پانچ منتظم مجسمات کثیر السطوح کی چار اور مجسم ہین جنکی بناوٹ مین وہی قرینہ پایا جاتا ہی جو منتظم مجسمات مین پایا جاتا اور اسیواسطے اونکو مجسمات منتظم گنا جاتا ہی۔ ہم ایک کثیر الاضلاع کا حال اسطرح لکہتی ہین کہ اوسی خیال اون نتایج کا جو پاین سوٹ نی ایجاد کئین بخوبی ذہن مین آجایگا فرض کرو کہ ایک دائرہ کی محیط پر پانچ نقطے برابر فاصلہ پر متواتر مقرر کی گئی ہین اگر ان نقاط مین خطوط ملاوین تو ایک مخمس بنجایگا۔ لیکن اگر ہم نقاط مین اسطرح سی خطوط وصل کرین کہ ا اور س مین اور س اور ی مین اور ی اور ب مین اور ب اور د مین اور د اور ا مین تو ہم ایک شکل ستارہ کی سی با قرینہ بنجائیگی اور ہم اوسکو مخمس منتظم کہہ سکتی ہین اسی ظاہر ہوتا ہے کہ اسطرح چار اور صرف چار جدید مجسمات بن سکتی ہین ایسی مجسمات سی جنکی جہات آپسمین تقاطع کرتی ہین یولر کا ضابطہ متعلق نہین ہے

(۱۶۳) اب دفعہ ۱۵۷ کی طرف پہر رجوع کرتی ہین فرض کرو کہ ی تعداد کنارون کے حد محاط پر ہی اور ی' تعداد کنارون کی اوسکی اندر ہی اور فرض کرو کہ ص تعداد کونون کی حد محاط مین ہی اور ص' تعداد اوسکی اندر ہے تو

ی = ی + ی'

ص = ص + ص'

اسیواسطے ا + ی + ی' = ص + ص' + ف

لیکن ی' = ص

اسیواسطے ا + ی = ص + ف

اب ہم ضابطہ یولر کو توسیع کی ساتہہ اوسطرح ثابت کرتی ہین جسطرح کا جی حساب نی لکہا ہے

(۱۶۴) ایک مجسم کثیر السطوح کو جتنی حصون مین چاہو مجسمات کثیر السطوح مین تقسیم کرو

اور فرض کرو کہ تعداد اونکی ع ہو اور ص تعداد زوایا ے مجسمہ کی ہو اور ف تعداد جہات کی اور ی تعداد کناروں کی تو ص + ف = ی + ع + ۱

اب فرض کرو کہ مجسمات ایک ایک کرکے آپسمین ملائی جائین اور فرض کرو کہ اول مین تعداد کناروں اور جہات اور زوایاے مجسمہ کی یَ اور فَ اور صَ اور دوم مین تعداد کناروں اور جہات اور زوایاے مجسمہ کی جو اول اور دوم مین مشترک نہین ہین یً اور فً اور صً ہین اور سوم مین تعداد کناروں اور جہات اور زوایاے مجسمہ کی جو اول اور دوم اور سوم مین مشترک نہین ہین یٌ اور فٌ اور صٌ ہین اور علی ہذا القیاس تو ہم کو موافق دفعہ ۱۶۲ کے نتایج حاصل ہونگے

صَ + فَ = یَ + ۲

صً + فً = یً + ۱

صٌ + فٌ = یٌ + ۱

. . . . = ...

اور جمع کرنے سے صَ + صً + صٌ + . . . = ص اور فَ + فً + فٌ + . . . = ف

اور یَ + یً + یٌ + . . . = ی ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ص + ف = ی + ع + ۱

(۱۶۵) بہت سی کتابین انگریزی مین ہین جنکا مطالعہ کرنا ضوابط مجسمات کثیر السطوح کی لیے بکار آمد ہوگا

امثلہ متفرقہ

(۱) جن کروی مثلثات قایم الزاویہ کا وتر ایک ہی ہو اونکی راسون کا مقام النقاط کیا ہوگا اور جو مساوات حاصل ہو اوسی ثابت کرو کہ مقام النقاط دائرہ ہوگا اگر نصف قطر کرہ کا لا انتہا ہو

(۲) سطح متسدیر کرہ پر ایک قوس دائرہ عظیم کی ہے اور س اوسکا نقطہ ہے تو ثابت کرو کہ مقام النقاط نقطوع کا ایسا کہ زاویہ اع س = زاویہ ب ع س کی ہو جو دوائر عظیمہ متقاطع القوایم ہوتی ہین اور جب مثلث کروی مثلث مستقیم الاضلاع بنجای تو بتاؤ کہ کیا ہوگا

(۳) کرہ کی ایک قوس پر مثلثات کروی متساوی الرقبہ بنائی گئی ہین تو ثابت کرو کہ مقام النقاط اوس کونی کی نقطہ کا جو قوس معلوم کی مقابل ہی اس مساوات سی تعبیر ہوگا کہ

مس^-۱ {(مس (کہ + د))/(مس ر)} + مس^-۱ {(مس (کہ − د))/(جب ر)}

+ مس^-۱ {(مس ر)/(جب (کہ + د))} + مس^-۱ {(مس ر)/(جب (کہ − د))} = ط

قوس معلوم کا طول ۲کہ ہی اور ر وہ قوس دائرہ عظیم کی ہی جو کسی نقطہ ع سی مقام النقاط مین کہ قوس معلوم پر عمود ہو کہینچا جاوے اور د زاویہ میلان اوس دائرہ عظیم کا ہے جسپر قوس ر کو پیمایش کیا ہی اوس دائرہ عظیم کی ساتہہ جو قوس معلوم کو زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتی ہی اور ط ایک مقدار مستقل ہے

(۴) کسی مثلث کروی مین مس طس = (جم ا مم طا + مم ب مم طب)/(جم طا مم طب − جم ا جم ب)

(۵) مثلث کروی ا ب س کی زاویون کی جو خطوط تنصیف کرنے والی جس نقطہ پر ملتے ہین اوس نقطہ اور زوایا ا د ب اور س کی درمیان بعد ر اور د اور ط ہی تو ثابت کرو کہ

جم ر جب (طب − طس) + جم د جب (طس − طا) + جم ط جب (طا − طب) = ۰

(۶) مثلث کروی ا ب س کی اضلاع ب س د س ا د ا ب کی قطب ا´ د ب´ د س´ ہین تو ثابت کرو دوائر عظیمہ ا ا´ اور ب ب´ اور س س´ ایک نقطہ ع پر ایسی ملتے ہین کہ

جم ع ا جم ب س = جم ع ب جم س ا = جم ع س جم ا ب

(۷) ایک مثلث کی زاویون سی قوسین ا د اور ب ی اور س ف عمود مقابل کے اضلاع پر اونسی نقاط د اور ی اور ف پر ملتی ہوئی کہینچی گئی ہین اور نقطہ ء پر تقاطع کرتی ہین تو ثابت کرو کہ (مس ا ء)/(مس ء د) اور (مس ب ء)/(مس ء ی) اور (مس س ء)/(مس ء ف) برابر ہین

۱ + (جم ا)/(جم ب جم س) اور ۱ + (جم ب)/(جم ا جم س) اور ۱ + (جم س)/(جم ا جم ب) کے موافق اپنی اپنی نظیر کے

(۸) اگر ع د ق د ر قوسین دوائر عظیمہ کی ہون جو مثلث کی زاویون سی عمود مقابل کے ضلعون پر کہینچی جائین اور ضلعے ان حصون (کہ د کہ′) کو (ہ د ہ′) اور (ط د ط′) مین تقسیم ہون

مس کہ مس کہ′ = مس ہ مس ہ′ = مس ط مس ط′

اور جم ع / جم کہ جم کر = جم ن / جم د جم ہ = جم ر / جم ط جم طر

(۹) اگر مثلث کروی کی اضلاع کی نقاط وسط اور زاویونمیر قوسین کہنچی جائین اور کہ اور کہ دو حصی قوس کی ہون جو ضلع ط کی تنصیف کرتی ہی تو ثابت کرو کہ

جب کہ / جب کہ = ۲ جم ط/۲

(۱۰) مثلث کروی کی اضلاع اب اور اس کی ایک قوس تنصیف کرکی تیسری خارج شدہ ضلع سے نقطہ ق پر ملتی ہی تو ثابت کر

جم اق جب ط/۲ = جب (طس - طب)/۲ جب (طس + طب)/۲

(۱۱) اگر کروی ذوار بعۃ الاضلاع اب س د مین مقابل کے اضلاع اب اور س د خارج ہو کر نقطہ ی پر ملین اور اد اور ب س نقطہ ف پر تو نسبت اون قوسون کی جیبون کی جو عمود ذوار بعۃ الاضلاع کی قطرون پر کہنچی جائین وہی ہوگی جو اون قوسون کی جیبون مین نسبت ہوگی جو عمود ذوار بعۃ الاضلاع کی قطرون پر نقطہ ف سے کہنچے

(۱۲) اگر کروی ذوار بعۃ الاضلاع اب س د کی اضلاع اب اور د س خارج ہو کر نقطہ ع پر ملین اور اد اور ب س نقطہ ق پر اور جنکی قطر اس اور ب د نقطہ ر پر تقاطع کرین تو

جب اب جب س د جم ع بہ جب اد جب ب س جم ق = جب اس جب ب د جم ر

(۱۳) اگر مثلث کروی کے قاعدہ کی اطراف اور مقابل کے اضلاع کی نقاط وسط مین قوسین ملائی گئین جو آپس مین برابر ہون تو مثلث متساوی الساقین ہوگا

(۱۴) اگر مثلث کروی کی اوپر دائرہ بنایا جاے اور اوسکی نصف قطر کا مماس برابر ہو دو چند مماس اوس دائرہ کی نصف قطر کی جو مثلث کی اندر بنایا جاے تو وہ مثلث متساوی الاضلاع ہوگا

(۱۵) قوس اع ایک دائرہ کی جسکا نصف قطر کرہ کا نصف قطر ہی برابر ہی ایک مثلث کروی کے دو ضلعون کے مجموعہ کی اور قوس اق اوسی سمت مین برابر ہی چہوٹی کی اور جب ع م کی اع نقطہ ی پر دو حصون مین ایسی تقسیم کی گئی ہی کہ ع ی/ع م = جب التمام اوس زاویہ کی جو درمیان دو ضلعون کے واقع ہی اور ی طاستوانی مماس دائرہ کا ہی نقطہ ق سی نکالا جاے تو ثابت کرو کہ باقی ضلع مثلث کروی کا برابر ہی قوس ق ع ط کے

(۱۶) ایک مثلث کروی اب س کی اندر ایک نقطہ ع ہی لیکر اوسی دوائر عظیمہ کو نوک کی نقاط

ا و ب و س تک کھینچی گئی ہیں اور مقابل کے ضلعوں سے نقاط اَ و بَ و سَ پر ملتی ہیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جب ع ا جم ع اَ}}{\text{جب ا اَ}} + \frac{\text{جب ع بَ جب ع ب}}{\text{جب ب بَ}} + \frac{\text{جب ع سَ جب ع س}}{\text{جب س سَ}} = ۱$$

(۱۷) روی زمین پر خط استوا کی ایک جانب میں دو مقام ا اور ب ہیں اور ا زیادہ فاصلہ پر خط استوا سے بہ نسبت ب کی ہے اگر مقام اضافی ا کا ب سے زیادہ نزدیک ٹھیک مشرق کو بہ نسبت اسکی کہ وہ کسی اور مقام سے ہو جسکا عرض وہی ہو جو ب کا ہے تو ثابت کرو کہ مقام اضافی ب کا ا سے کیا ہوگا

(۱۸) باب پنجم کی ۱۸ امثال سے اشکال مجسم منتظم وہی اثنی عشری القواعد کا ثابت کرو

(۱۹) ا اور ب دو قایم نقطی سطح مستدیر کرہ پر ہیں اور ع ایک اور نقطہ سطح مستدیر پر ہے اگر طا اور طب مستقل مقادیر ہوں تو ثابت کرو کہ نقطہ قایم ص ہمیشہ اب یا اب خارج شدہ میں ایسا دریافت ہو سکتا ہے کہ

طا جم ا ع + طب جم ب ع = م جم ص ع

جسمیں م ایک مقدار مستقل ہے

(۲۰) کرہ کی سطح مستدیر ا و ب و س ... قایم نقاط ہیں اور طا و طب و طس ... مقادیر مستقل معلوم ہیں اگر ع ایک نقطہ سطح مستدیر کرہ پر + ایسا ہو کہ

طا جم ا ع + طب جم ب ع + طس جم س ع ± ... = مقدار مستقل کے

تو ثابت کرو کہ مقام النقاطع کا ایک دائرہ ہے

باب چہاردہم

مثلثات کروی کا حل اعداد میں

(۱۶۶) اس باب میں ہم مثالیں مثلث کروی کی اعداد میں حل کرنے کی لکھینگے اول مثلث قایم الزاویہ کی مثالیں اور بعد ازاں مثلث غیر قایم الزاویہ کے حل کرینگے

مثلث قایم الزاویہ

(۱۶۷) معلوم ہے کہ طا = ۷۳° ۴۸' ۱۲" اور طب = ۹۵° ۴۴' ۱۲" اور س = ۹۰° تو ہم طس اسطرح دریافت کرتے ہیں کہ

جم طس = جم طا جم طب

ل جم ۳۷° ۱۸′ ۱۲″ = ۹٫۸۹۷۶۹۲۷

ل جم ۵۹° ۴۴′ ۱۴″ = ۹٫۷۰۲۳۹۷۵

ل جم طس + ۱۰ = ۱۹٫۶۰۰۰۸۷۲

طس = ۶۶° ۳۲′ ۶″

ہم ا دریافت کرتے ہیں

مم ا = مم طا جب طب

ل مم ۳۷° ۴۸′ ۲″ = ۱۰٫۱۱۰۲۶۵۵

ل جب ۵۹° ۴۴′ ۱۴″ = ۹٫۹۳۶۳۷۷۰

ل مم ا + ۱۰ = ۲۰٫۰۴۶۶۴۲۵

ا = ۴۱° ۵۵′ ۴۵″

ہم ب دریافت کرتے ہیں

مم ب = مم طب جب طا

ل مم ۵۹° ۴۴′ ۱۴″ = ۹٫۷۶۶۰۱۷۵

ل جب ۳۷° ۴۸′ ۱۲″ = ۹٫۷۸۷۴۲۷۲

ل مم ب + ۱۰ = ۱۹٫۵۵۳۴۴۴۷

ب = ۷۰° ۱۹′ ۱۵″

(۱۴۸) معلوم ہے کہ ا = ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ اور س = ۹۰° اور طس = ۹۸° ۱۴′ ۲۴″

ہم طا دریافت کرتے ہیں

جب طا = جب طس جب ا

ل جب ۸۱° ۴۵′ ۳۶″ = ۹٫۹۹۵۴۹۳۳

ل جب ۹۸° ۱۴′ ۲۴″ = ۹٫۹۹۵۸۴۹۳۲

ل جب ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ = ۹٫۹۱۶۲۳۲۳

ل جب ط + ۱۰ = ۱۹٫۹۱۱۷۲۵۵

ط = ۵۴° ۱۸′ ۳۵″

ہم ب دریافت کرتے ہیں

مم ب = جم طس مس ا

یہاں جم طس منفی ہی اسیواسطے مم ب منفی ہوگا اور ب بڑا قائمہ سی ہوگا عددی قیمت جم طس کی وہی ہی جو جم ۸۱° ۴۵′ ۳۶″ کی ہے

ل جم ۸۱° ۴۵′ ۳۶″ = ۹٫۱۵۶۳۰۶۵

ل مس ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ = ۱۰٫۱۶۳۶۱۰۲

ل مم (۱۸۰° − ب) + ۱۰ = ۱۹٫۳۱۹۹۱۶۷

۱۸۰ − ب = ۷۸° ۱۲′ ۴″

ب = ۱۰۱° ۴۷′ ۵۶″

ہم طب دریافت کرتے ہیں

مس طب = مس طس جم ا

یہاں مس طس منفی ہیں اسلئے مس طب بھی منفی ہوگا اور طب بڑا ربعیہ سی ہوگا

ل مس ۸۱° ۴۵′ ۳۶″ = ۱۰٫۸۳۹۱۵۶۷

ل جم ۵۵° ۳۲′ ۴۵″ = ۹٫۷۵۲۶۲۲۱

ل مس (۱۸۰° − طب) + ۱۰ = ۲۰٫۵۹۱۸۰۸۸

۱۸۰° − طب = ۷۵° ۳۸′ ۳۲″

طب = ۱۰۴° ۲۱′ ۲۸″

(۱۶۹) معلوم ہی ا = ۴۶° ۱۵' ۲۵" اور س = ۹۰° اور طا = ۴۲° ۱۸' ۴۵"

اب ہم طس دریافت کرتے ہین

جب طس = جب طا / جب ا

ل جب طس = ۱۰ + ل جب طا − ل جب ا

۱۰ + ل جب ۴۲° ۱۸' ۴۵" = ۱۹٫۸۲۸۱۲۷۲

ل جب ۴۶° ۱۵' ۲۵" = ۹٫۸۵۸۸۰۶۵

ل جب طس = ۹٫۹۶۹۳۲۰۷

طس = ۶۸° ۴۲' ۵۹" یا ۱۱۰° ۱۷' ۱"

اب ہم طب دریافت کرتے ہین

جب طب = مس طا مم ا

ل مس ۴۲° ۱۸' ۴۵" = ۹٫۹۵۹۱۹۸۳

ل مم ۴۶° ۱۵' ۲۵" = ۹٫۹۸۰۹۳۸۹

ل جب طب + ۱۰ = ۱۹٫۹۴۰۱۳۷۲

طب = ۶۰° ۳۶' ۱۰" یا ۱۱۹° ۲۳' ۵۰"

اب ہم ب دریافت کرتے ہین

جب ب = جم ا / جم طا

ل جب ب = ل جم ا − ل جم طا + ۱۰

۱۰ + ل جم ۴۶° ۱۵' ۲۵" = ۱۹٫۸۳۹۷۴۵۴

ل جم ۴۲° ۱۸' ۴۵" = ۹٫۸۶۸۹۲۸۹

ل جب ب = ۹٫۹۷۰۸۱۶۵

ب = ۶۹° ۱۳' ۴۷" یا ۱۱۰° ۴۶' ۱۳"

مثلثات غیر قائم الزاویہ

(١٧) طا = ٧٠° ١٤′ ٢٠″ طب = ٤٩° ٢٤′ ١٠″ طس = ٣٨° ٤٦′ ١٠″

اب ہم صورت دفعہ ٤٥ کو کام میں لاتے ہیں

$$\text{مس} \tfrac{1}{2}\text{ا} = \sqrt{\frac{\text{جب (م − طب) جب (م − طس)}}{\text{جب م جب (م − طا)}}}$$

م = ٧٩° ١٢′ ٢٠″

م − طا = ٨° ٥٨′

م − طب = ٢٩° ٤٨′ ١٠″

م − طس = ٤٠° ٢٦′ ١٠″

ل جب ٢٩° ٤٨′ ١٠″ = ٩٫٦٩٦٤٣٧٠٤

ل جب ٤٠° ٢٦′ ١٠″ = ٩٫٨١١٩٧٦٨

١٩٫٥٠٨٣٤٧٢

ل جب ٧٩° ١٢′ ٢٠″ = ٩٫٩٩٢٢٤٩٥

ل جب ٨° ٥٨′ = ٩٫١٩٢٧٣٤٢

١٩٫١٨٤٩٨٠٧

١٩٫٥٠٨٣٤٧٢

١٩٫١٨٤٩٨٠٧

٢) ٫٣٢٣٣٦٦٥

ل مس ½ ا − ١٠ = ٫١٦١٦٨٣٢

½ ا = ٥٥° ٢٥′ ٣٨″

ا = ١١٠° ٥١′ ١٦″

اور اسیطرح ب دریافت کرتے ہیں

ل جب ٨° ٥٨′ = ٩٫١٩٢٧٣٤٢

ل جب ٤٠° ٢٦′ ١٠″ = ٩٫٨١١٩٧٦٨

١٩٫٠٠٤٧١ [illegible]

ل ۷۹° ۱۲′ ۲۰″ = ۹٫۹۹۲۲۴۶۵

ل جب ۲۹° ۴۸′ ۱۰″ = ۹٫۶۹۶۳۷۰۴

۱۹٫۶۸۸۶۱۶۹

۱۹٫۰۰۴۷۱۱۰

۱۹٫۶۸۸۶۱۶۹

۲) ۱̅٫۳۱۶۰۹۴۱

ل س ½ب − ۱۰ = ۱̅٫۶۵۸۰۴۷۰

ل س ½ب = ۹٫۶۵۸۰۴۷۰

½ب = ۲۴° ۲۸′ ۲″

ب = ۴۸° ۵۶′ ۴″

اسیطرح س دریافت کرتے ہیں

ل جب ۸° ۵۸′ = ۹٫۱۹۲۷۳۴۲

ل جب ۲۹° ۴۸′ ۱۰″ = ۹٫۶۹۶۳۷۰۴

۱۸٫۸۸۹۱۰۴۶

ل جب ۷۹° ۱۲′ ۲۰″ = ۹٫۹۹۲۲۴۶۵

ل جب ۴۰° ۲۶′ ۱۰″ = ۹٫۸۱۱۹۷۶۸

۱۹٫۸۰۴۲۲۳۳

۱۸٫۸۸۹۱۰۴۶

۱۹٫۸۰۴۲۲۳۳

۲) ۱̅٫۰۸۴۸۸۱۳

ل س ½س − ۱۰ = ۱̅٫۵۴۲۴۴۰۶

½س = ۱۹° ۱۳′ ۲۴″

س = ۳۸° ۲۶′ ۴۸″

(١٧١) معلوم ہی طا = ٦٨° ٢٠' ٢٥" طب = ٥٢° ١٨' ١٥"

س = ١١٧° ١٢' ٢٠" بموجب دفعہ ٨٢ کے

مس ½ (ا+ب) = (جم ½ (طا−طب) / جم ½ (طا+طب)) مم ½ س

مس ½ (ا−ب) = (جب ½ (طا−طب) / جب ½ (طا+طب)) جم ½ س

½ (طا−طب) = ٨° ١' ٥" ½ (طا+طب) = ٦٠° ١٩' ٢٠" ½ س = ٥٨° ٣٦' ١٠"

ل جم ٨° ١' ٥" = ٩٫٩٩٥٧٣٣٥

ل مم ٥٨° ٣٦' ١٠" = ٩٫٧٨٥٥٦٩٠

١٩٫٧٨١٣٠٢٥

ل جم ٦٠° ١٩' ٢٠" = ٩٫٦٩٤٧١٢٠

ل مس ½ (ا+ب) = ١٠٫٠٨٦٥٩٠٥

½ (ا+ب) = ٥٠° ٤٠' ٤٨"

ل جب ٨° ١' ٥" = ٩٫١٤٤٥٢٨٠

ل مم ٥٨° ٣٦' ١٠" = ٩٫٧٨٥٥٦٩٠

١٨٫٩٣٠٠٩٧٠

ل جب ٦٠° ١٩' ٢٠" = ٩٫٩٣٨٩٣١٦

ل مس ½ (ا−ب) = ٨٫٩٩١١٦٥٤

½ (ا−ب) = ٥° ٣٥' ٤٧"

اسواسطے ا = ٥٦° ١٦' ٣٥" اور ب = ٤٥° ٤' ٦١"

طس کو اس صورت سے دریافت کرین کہ

جب طس = جب طا جب س / جب ا

چونکہ جب س بڑا جب ا سے ہی تو ہم دو قیمتین طس کے بڑی طا سے دریافت کرینگے اور ہم کو یہ نہین معلوم ہوگا کہ کونسی قیمت ہم لین

اس لئی ہم طس کو دفعہ ۸۴ کی صورت (۱) سی دریافت کرتی ہین جسمین کوئی شبہ نہین واقع ہوتا

جم ½ طس = جم ½ (طا + طب) جب ½ س / جم ½ (ا + ب)

ل جم ۹۰° ۱۹′ ۲۰″ = ۹٫۷۶۹۴۷۱۲۰

ل جیب ۵۸° ۳۶′ ۱۰″ = ۹٫۹۳۱۲۴۲۲

۱۹٫۶۲۵۹۵۴۲

ل جم ۵۰° ۴۰′ ۲۸″ ۹٫۸۰۱۹۰۱۵

ل جم ½ طس = ۹٫۸۲۴۰۵۲۷

½ طس = ۴۸° ۱۰′ ۲۲″

طس = ۹۶° ۲۰′ ۴۴″

یا ہم دفعہ ۸۲ کی دوسرے ترکیب کو کام مین لائین ـــ اول ہم ر کو صورت مس ر = مس طب جم س سی دریافت کرتے ہین

یہان جم س منفی ہی اسلئی مس ر منفی ہوگا اور ر برا قائمہ سی ہی اور عددی قیمت جم س کی وہی جو جم ۶۲° ۴۷′ ۴۰″ کی ہے

ل مس ۵۲° ۱۸′ ۱۵″ = ۱۰٫۱۱۱۹۴۸۸

ل جم ۶۲° ۴۷′ ۴۰″ = ۹٫۶۶۰۹۱۲

ل مس (۱۸۰° − ر) + ۱۰ = ۱۹٫۷۷۲۰۴۰۰

۱۸۰° − ر = ۳۰° ۳۶′ ۳۳″

ر = ۱۴۹° ۲۳′ ۳۷″

پہر ہم طس کو اس صورت سی دریافت کرتے ہین کہ

جم طس = جم طب جم (طا − ر) / جم ر

یہان جم ر منفی ہی اور اسیواسطے جم طس منفی ہوگی اور طس برا زاویہ قائمہ سی ہوا اور عددی قیمت جم ر کی وہی ہوگی جو جم (۱۸۰° − ر) کی ہی یعنی جم ۳۰° ۳۶′ ۳۳″ کی اور قیمت جم (طا − ر) کی وہی جو جم (ر − طا) کی یعنی جم ۱۱° ۳′ ۴″ کی

ل جم ۵۲° ۱۸′ ۱۵″ = ۹٫۷۸۶۳۷۴۸

ل جم ۸۱° ۳′ ۲″ = ۹٫۱۹۱۹۰۶۰

۱۸٫۹۷۸۲۸۰۸

ل جم ۳۰° ۳۶′ ۳۳″ = ۹٫۹۳۴۸۳۱۹

ل جم (۱۸۰° − طس) = ۹٫۰۴۳۴۴۸۹

۱۸۰° − طس = ۸۳° ۳۹′ ۱۷″

طس = ۹۶° ۲۰′ ۴۳″

جدولوں میں نہایت قریب تعداد ثانیوں کی یعنی دو لوترکیبوں میں ثانیوں کے اندر ½ ثانیہ کا فرق رہتا ہے اگر ہم ثانیوں میں انکی کسروں کا بھی حساب لگائیں تو دو لوترکیبوں میں تعداد ثانیوں کی ۴۲½ ہوگی

(۱۷۲) معلوم ہے کہ طا = ۵۰° ۴۵′ ۲۰″ طب = ۶۹° ۱۲′ ۴۰″ ا = ۴۴° ۲۲′ ۱۰″

بموجب دفعہ ۸۴ کے جب ب = (جب طب / جب طا) جب ا

ل جب ۶۹° ۱۲′ ۴۰″ = ۹٫۹۷۰۷۶۲۶

ل جب ۴۴° ۲۲′ ۱۰″ = ۹٫۸۴۴۶۵۲۵

۱۹٫۸۱۵۴۱۵۱

ل جب ۵۰° ۴۵′ ۲۰″ = ۹٫۸۸۸۹۹۵۶

ل جب ب = ۹٫۹۲۶۴۱۹۵

ب = ۵۷° ۴۳′ ۴۳٫۱۵″ یا ۱۲۲° ۲۵′ ۶٫۸

اس صورت میں دو حل ہونگے دفعہ ۸۶ کو دیکھو۔ ہم س اور طس کا حساب مماثلات نیپری سے اسطرح حل کرینگے کہ مس ½ س = [جم ½ (طب − طا) / جم ½ (طب − طا)] جم ½ (ا + ب)

مس ½ طس = [جم ½ (ب + ا) / جم ½ (ب − ا)] مس ½ (طب + طا)

اول چھوٹی قیمت ب کی دریافت کرو اسطرح کہ

½ (ب + ا) = ۵۰° ۵۸′ ۷٫۳۰″ اور ½ (ب − ا) = ۶° ۳۶′ ۶٫۲۰″

ل جم ۶° ۳۱′ ۴۰″ = ۹٫۹۹۴۳۴۳۰

ل مم ۵۰° ۵۸′ ۷،۳۰″ = ۹،۹۹۸۷۵۳۶

۱۹،۹۹۳۰۹۶۶

ل جم ۵۹° ۵۹′ = ۹،۶۹۹۱۸۸۷

ل مس ½ س = ۱۰،۲۹۳۹۰۷۹

½ س = ۵۷° ۵۸′ ۳،۵۵″

س = ۱۱۵° ۵۶′ ۷،۱۰″

ل جم ۵۰° ۵۸′ ۷،۳۰″ = ۹،۷۹۹۱۰۳۹

ل مس ۵۹° ۵۹′ = ۱۰،۲۳۸۲۶۸۹

۲۰،۰۳۷۳۷۲۸

ل جم ۳۶° ۴۴′ ۷،۲۰″ = ۹،۹۹۷۱۰۷۲

ل مس ½ ط س = ۱۰،۰۴۰۲۶۵۶

½ ط س = ۴۷° ۳۹′ ۸،۲″

ط س = ۹۵° ۱۸′ ۱۶،۴″

اب بڑی قیمت ب کی دریافت کرویں

½ (ب + ا) = ۸۳° ۲۳′ ۳،۳۹″ ½ (ب − ا) = ۹° ۳۱′ ۳،۲۹″

ل جم ۹° ۱۳′ ۴۰″ = ۹،۹۹۴۳۴۳۰

ل مم ۸۳° ۲۳′ ۳،۳۹″ = ۹،۰۶۲۷۲۹۷

۱۹،۰۵۸۰۷۲۷

ل جم ۵۹° ۵۹′ = ۹،۶۹۹۱۸۸۷

ل مس ½ س = ۹،۳۵۸۸۸۴۰

½ س = ۱۲° ۵۲′ ۱۵،۸″

س = ۲۵° ۴۴′ ۳۱،۶″

ل جم ۸۳° ۲۳′ ۳،۳۹″ = ۹،۰۶۰۸۳۶۹

ل مس ۵۹° ۵۹′ = ۱۰،۲۳۸۲۶۸۹

۱۹،۲۹۹۱۰۵۸

ل جم ۹° ۳۱′ ۳،۲۹″ = ۹،۸۹۰۳۴۹۴

ل مس ½ ط س = ۹،۴۰۸۷۵۶۴

½ ط س = ۱۴° ۲۲′ ۶،۳۲″

ط س = ۲۸° ۴۵′ ۲،۵″

بہت سی مثالیں طالب علم بنا سکتے ہیں اور اونکا ثبوت انہیں مثالوں سے ہوسکتا ہے مقادیر معلوم کو

مقادیر مطلوبہ یا الیں [illegible] مقادیر مطلوبہ کو مقادیر معلوم یا قطبی مثلثوں کو کام میں لاہیں

امثلہ

(۱) معلوم ہی طب = ۱۴۷° ۳′ ۴۸″ ا = ۱۴۷° ۲′ ۵۴″ س = ۹۰°

نتیجے طس = ۴۷° ۷′ ۵″ طا = ۵۶° ۱۰′ ۳۴″ ب = ۱۱۳° ۲۹′

(۲) معلوم ہے طس = ۶۱° ۴′ ۵۶″ طا = ۴۰° ۳۱′ ۲۰″ س = ۹۰°

نتائج طب = ۵۰° ۳۰′ ۲۹″ ب = ۶۱° ۵۰′ ۲۸″ ا = ۴۷° ۴۵′ ۲۱″

(۳) معلوم ہے کہ ا = ۳۶° ب = ۴۰° س = ۹۰°

نتائج طا = ۲۰° ۴۵′ ۵۸″ طب = ۳۱° ۳۴′ ۳″ طس = ۳۷° ۲۱′ ۵۸″ ۳۸″

(۴) معلوم ہے کہ طا = ۵۹° ۲۸′ ۲۷″ ا = ۶۶° ۷′ ۲۰″ س = ۹۰°

نتائج طس = ۷۰° ۲۳′ ۴۲″ طب = ۴۸° ۳۹′ ۱۴″ ب = ۵۲° ۵۰′ ۲۰″

یا طس = ۱۰۹° ۳۶′ ۱۸″ طب = ۱۳۱° ۲۰′ ۴۴″ ب = ۱۲۷° ۹′ ۴۰″

(۵) طس = ۹۰° طا = ۱۳۸° ۱۴′ طب = ۱۰۹° ۴۱′

نتائج س = ۱۱۳° ۲۸′ ۲″ ا = ۱۴۲° ۱۱′ ۳۸″ ب = ۱۲۰° ۱۵′ ۷″ ۵″

(۶) معلوم ہے طس = ۹۰° ا = ۱۳۱° ۳۰′ ب = ۱۲۰° ۳۲′

نتائج س = ۱۰۹° ۴۰′ ۲۰″ طا = ۱۲۷° ۱۷′ ۵″ طب = ۱۱۳° ۴۹′ ۳۱″

(۷) طا = ۷۶° ۳۵′ ۳۶″ طب = ۵۰° ۱۰′ ۳۰″ طس = ۴۰° ۲′ ۱۰″

نتائج ا = ۱۲۱° ۳۶′ ۲۰″ ب = ۴۲° ۱۵′ ۳″ س = ۳۴° ۱۵′ ۳″

(۸) ا = ۱۲۹° ۲۸′ ۲″ ب = ۱۴۳° ۱۲′ ۴۲″ س = ۱۰۵° ۱۸′ ۱۰″

نتائج طا = ۱۳۵° ۹′ ۴۲″ طب = ۱۴۴° ۳۷′ ۱۵″ طس = ۶۰° ۴۰′ ۴۵″

تمت تمام شد کتاب علم مثلثات کروی